ナップサック問題に対する確率的ロバスト最適化

小林 佑輔 筑波大学
高澤 兼二郎 京都大学

日本応用数理学会 2015 年度年会
金沢大学
2015 年 9 月 9 日

ナップサック問題

- アイテム集合: E
- アイテムの価値 $p_e \geq 0$ $(e \in E)$
- アイテムの重さ $w_e \geq 0$ $(e \in E)$
- ナップサックの容量 $C \geq 0$

● 許容解の集合 $\mathcal{F} = \{X \subseteq E : w(X) \leq C\}$

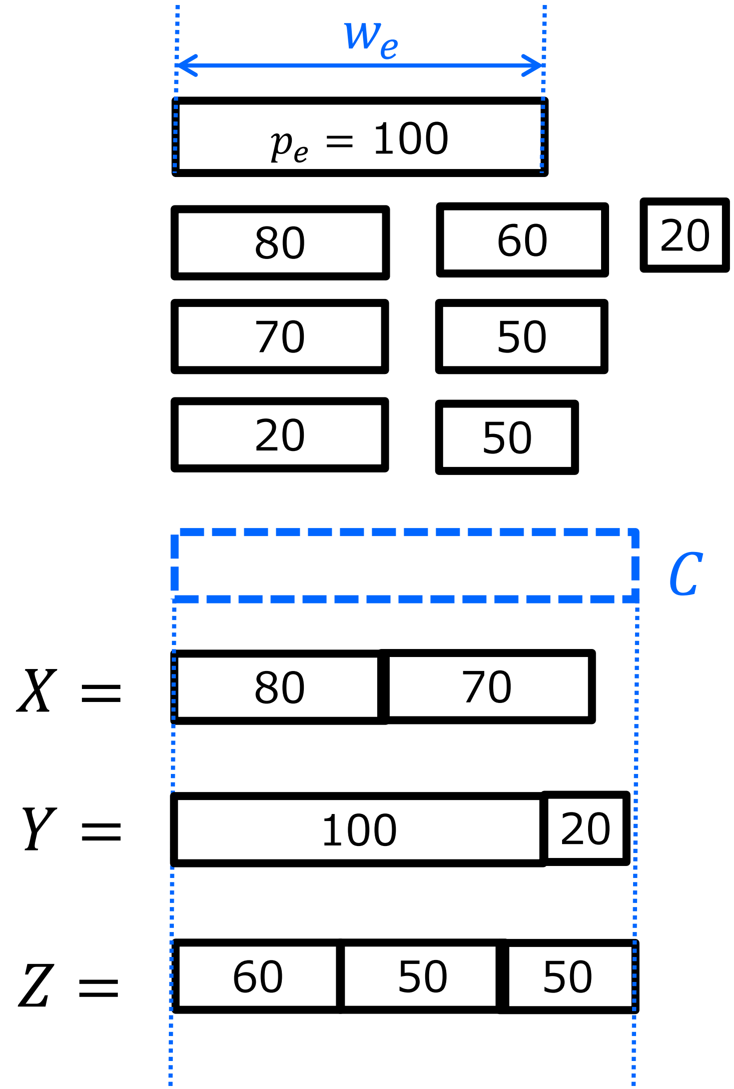
$w(X) = \sum_{e \in X} w_e$

$p(X) = \sum_{e \in X} p_e$

● 問題

maximize $\quad p(X)$
subject to $\quad X \in \mathcal{F}$

- ➢ NP 困難
- ➢ FPTAS



アイテム数についてのロバスト性

- **アイテム数 $\leq k$ の制約**の下で
  許容解 X がどれだけ最適に近いか

$X(k)$ 最適解 OPT_k

(p の大きい順に $\leq k$ 個)

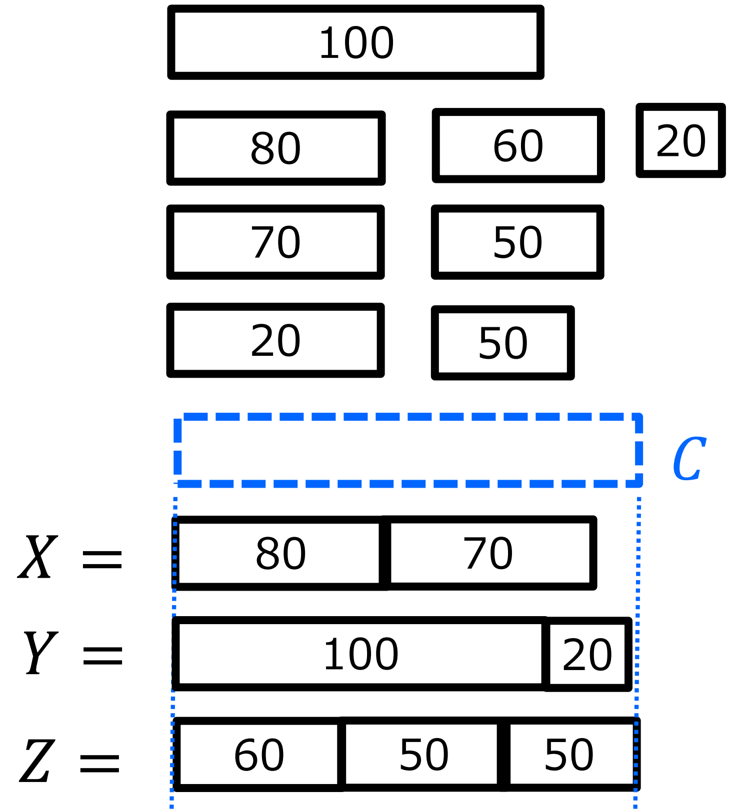
$p(X(1)) = 80$ $p(\mathrm{OPT}_1) = 100$

$p(X(2)) = 150$ $p(\mathrm{OPT}_2) = 150$

$p(X(3)) = 150$ $p(\mathrm{OPT}_3) = 160$

$\vdots$

➔ **X のロバスト比 = 0.8**



定義

$X \in \mathcal{F}, 0 < \alpha \leq 1$

➢ X が **α-ロバスト** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall k,\ p(X(k)) \geq \alpha \cdot p(\mathrm{OPT}_k)$

➢ X の **ロバスト比** $\overset{\text{def}}{=} \min_k \dfrac{p(X(k))}{p(\mathrm{OPT}_k)}$

目次

- **導入**: ロバスト・ナップサック

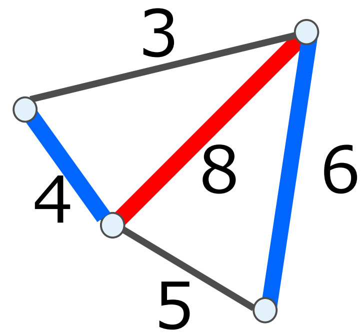
- **先行研究**
  - Hassin, Rubinstein [2002]: ロバスト・マッチング
  - 垣村, 牧野 [2013]: ロバスト・独立システム
  - Matuschke, Skutella, Soto [2015]: 混合戦略

- **本研究**: **ロバスト・ナップサックに対する混合戦略**
  - ロバスト比の上界・下界
  - 純粋戦略のロバスト比を改善

- **まとめ・今後の課題**

マッチング / マトロイドの共通独立集合

- **Hassin, Rubinstein [2002]**
  - **マトロイド**: 貪欲算法 ➔ **1-ロバスト**
  - **マッチング**: $\sum_{e \in X} p_e^2$ を最大化 ➔ $\frac{1}{\sqrt{2}}$**-ロバスト**
  - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **が最大**ロバスト比となる例:

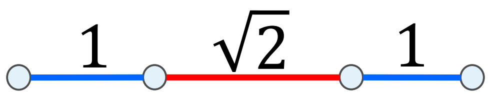


$p(\mathrm{OPT}_1) = 8$

$p(\mathrm{OPT}_2) = 10$

X: 0.8-ロバスト

Y: 0.75-ロバスト



$p(\mathrm{OPT}_1) = \sqrt{2}$

$p(\mathrm{OPT}_2) = 2$

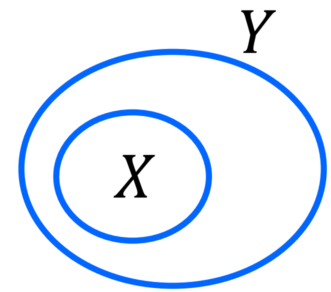
X, Y: $\frac{1}{\sqrt{2}}$-ロバスト

- **藤田, 小林, 牧野 [2013]**
  - **マトロイドの共通独立集合**: $\sum_{e \in X} p_e^2$ を最大化 ➔ $\frac{1}{\sqrt{2}}$**-ロバスト**
  - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ より大きいロバスト比の**マッチング**の存在判定は **NP 困難**

ロバスト・独立システム

定義

$(E,\mathcal{F})$ が**独立システム** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}, \\ X \subseteq Y, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F} \end{cases}$

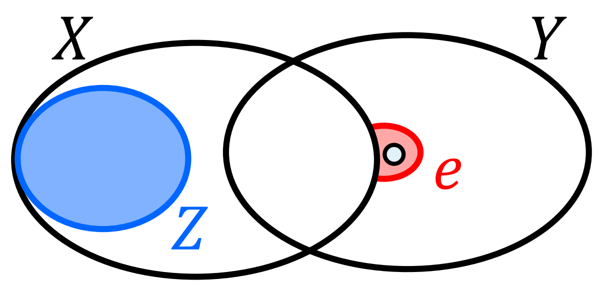


- **垣村, 牧野 [2013]**
  - **独立システム**: $\sum_{e\in X} p_e^2$ を最大化 ➔ $\frac{1}{\sqrt{\mu(\mathcal{F})}}$**-ロバスト**
  - $\frac{1}{\sqrt{\mu(\mathcal{F})}}$ が最大ロバスト比となる例

定義 [Mestre 2006]

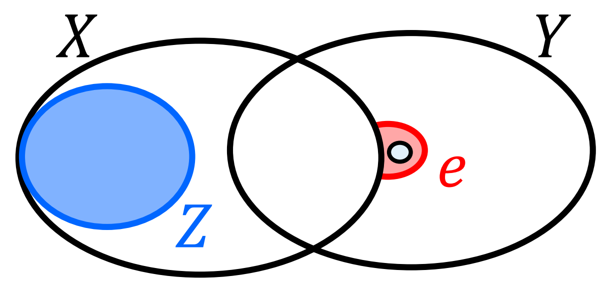
$\mu(\mathcal{F}) \triangleq$ 以下をみたす最小の整数 μ:

$$X, Y \in \mathcal{F}, e \in Y - X$$
$$\Rightarrow \exists Z \subseteq X - Y$$
$$\text{s.t. } |Z| \leq \mu, (X - Z) + e \in \mathcal{F}$$

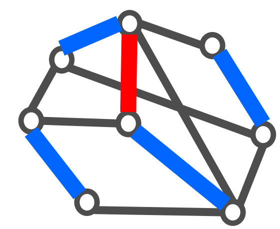


$\mu(\mathcal{F})$：独立システムの扱いやすさのパラメータ

- **垣村, 牧野 [2013]:** $\sum_{e \in X} p_e^2$ を最大化 ➔ $\frac{1}{\sqrt{\mu(\mathcal{F})}}$**-ロバスト**



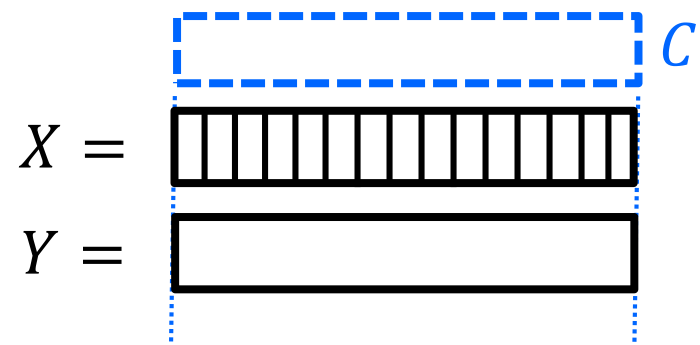
- マトロイドの独立集合: $\mu(\mathcal{F}) = 1$
- マッチング: $\mu(\mathcal{F}) \leq 2$
- マトロイド m 個の共通独立集合: $\mu(\mathcal{F}) \leq m$



- **ナップサック問題の許容解**

  ➔ $\mu(\mathcal{F}) = M$ (任意に大きい M)

$$X = \{e_1, \ldots, e_M\} \left(w_{e_i} = C/M\right)$$
$$Y = \{e_0\} \quad (w_{e_0} = C)$$



- **垣村, 牧野, 勢見 [2012]**
  - ロバスト比最大のナップサック解: 弱 NP 困難 + FPTAS

目次

- **導入**: ロバスト・ナップサック
- **先行研究**
  - ➢ Hassin, Rubinstein [2002]: ロバスト・マッチング
  - ➢ 垣村, 牧野 [2013]: ロバスト・独立システム
  - ➢ Matuschke, Skutella, Soto [2015]: 混合戦略
- **本研究**: **ロバスト・ナップサックに対する混合戦略**
  - ➢ ロバスト比の上界・下界
  - ➢ 純粋戦略のロバスト比を改善
- **まとめ・今後の課題**

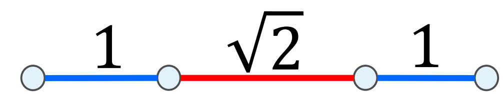
ロバスト・独立システムの確率的最適化

- **Matuschke, Skutella, Soto [2015]**: **ゼロ和ゲーム**表現

> Alice: $X \in \mathcal{F}$ を選ぶ
>
> Bob: (X を知った上で) アイテム数 k を決める
>
> ➔ Alice が受け取るペイオフ $= \dfrac{p(X(k))}{p(\mathrm{OPT}_k)}$

- 戦略 = 許容解の確率分布
- 解 X_i を確率 λ_i で選択する**混合戦略のロバスト比**:

$$\min_k \mathbf{E}\left[\frac{p(X(k))}{p(\mathrm{OPT}_k)}\right] = \min_k \frac{\sum_i \lambda_i\, p(X_i(k))}{p(\mathrm{OPT}_k)}$$



$p(\mathrm{OPT}_1) = \sqrt{2}$

$p(\mathrm{OPT}_2) = 2$

- 例: X, Y を確率 ½ で選択する戦略

$$\min\left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\ \frac{\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\right\} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = 0.8535\ldots$$

> X, Y のロバスト比
>
> $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071\ldots$

ロバスト・独立システムの混合戦略

- **Matuschke, Skutella, Soto [2015]**

価値 p を 2 のベキ乗に丸める

1. x を $[0,1]$ の一様分布から選ぶ
2. 各アイテム e について $q_e := \log_2 p_e$, $\boldsymbol{p'_e := 2^{\lfloor q_e - x \rfloor}}$ として，
   $p'(X)$ が最大の $X \in \mathcal{F}$ を求める

定理 [MSS 15]

$(E,\mathcal{F})$ がい以下をみたすとき，上記の混合戦略のロバスト比は $\boldsymbol{\frac{1}{\ln 4}}$:

- 各 p_e が 2 のベキ乗のときに $\boldsymbol{p(\mathrm{OPT}(\cdot))}$ **が凹関数**, i.e.,
  $p\big(\mathrm{OPT}(k)\big) + p\big(\mathrm{OPT}(k+2)\big) \leq 2 \cdot p\big(\mathrm{OPT}(k+1)\big) \ \forall k$

$0.7213 \ldots$

- マッチング
- マトロイドの共通独立集合
- Strongly base orderable matroid parity

cf. $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 \ldots$

[本研究] ロバスト・ナップサックの混合戦略

- 純粋戦略のロバスト比: $\frac{1}{\sqrt{\mu(\mathcal{F})}}$ がタイト[垣村, 牧野 13]

$\mu(\mathcal{F})$:いくらでも大きくなる

- **混合戦略のロバスト比 [本研究]**

1. **上界** $O\left(\frac{\log\log\mu(\mathcal{F})}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$, $O\left(\frac{\log\log\rho(\mathcal{F})}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$

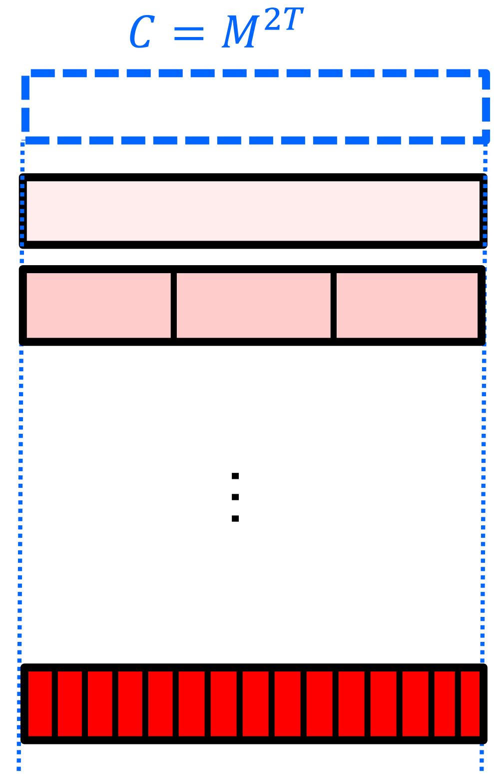
$\rho(\mathcal{F})$: 独立システムの新たな指標を導入

2. **下界** $\Omega\left(\frac{1}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$, $\Omega\left(\frac{1}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$: 混合戦略を設計

⇒ 3. **独立システム**に拡張: $O\left(\frac{1}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$, $O\left(\frac{1}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$, $\Omega\left(\frac{1}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$

成果 1. ロバスト比の上界: 難しい例

タイプ	w_e	p_e	個数	p_e/w_e	p の合計
0	M^{2T}	M^{2T}	1	1	M^{2T}
1	M^{2T-2}	M^{2T-1}	M^2	M	M^{2T+1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	M^{2T-2i}	M^{2T-i}	M^{2i}	M^i	M^{2T+i}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T	1	M^T	M^{2T}	M^T	M^{3T}



定理 [本研究]

任意の混合戦略のロバスト比 $\leq \frac{1}{T+1} + \frac{2}{M}$

$$p\big(\mathrm{OPT}(1)\big) = M^{2T}$$

$$p\big(OPT(M^{2T})\big) = M^{3T}$$

➢ **混合戦略でも定数のロバスト比を達成できない**

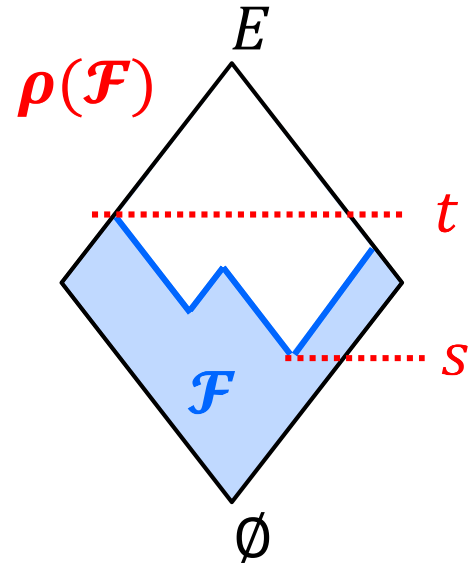
$\rho(\mathcal{F})$: 独立システムの新たなパラメータ

定義

$\rho(\mathcal{F}) := \frac{t}{s}$, ただし

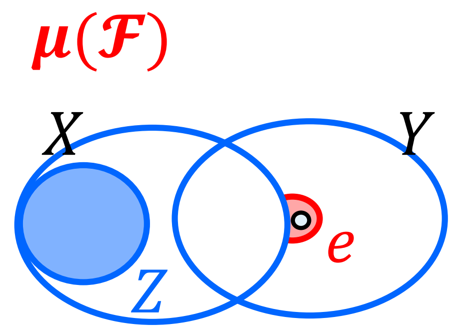
$s := \min\{|X| : X \notin \mathcal{F}\} - 1$, $t := \max\{|X| : X \in \mathcal{F}\}$

- 一様マトロイド $\Leftrightarrow \rho(\mathcal{F}) = 1$
  (cf. マトロイド $\Leftrightarrow \mu(\mathcal{F}) = 1$)



定理

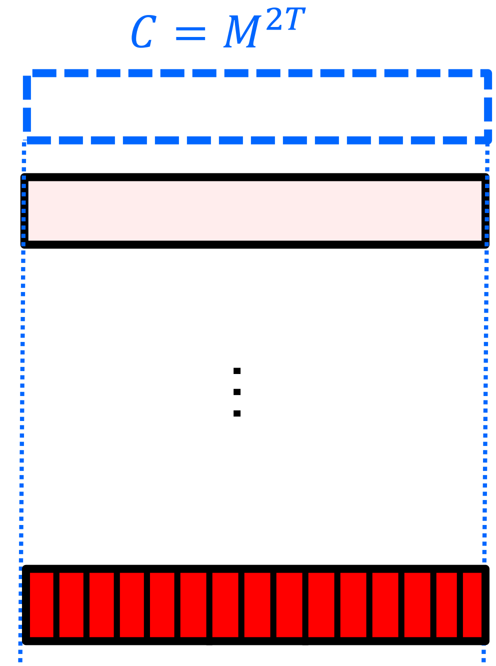
- $p(X)$ の最大化に対する**貪欲算法の近似比**は
  - $1/\mu(\mathcal{F})$ [Mestre 2006]
  - **$1/\rho(\mathcal{F})$ [本研究]**
- $\rho(\mathcal{F})/\mu(\mathcal{F})$ は任意の値をとる **[本研究]**



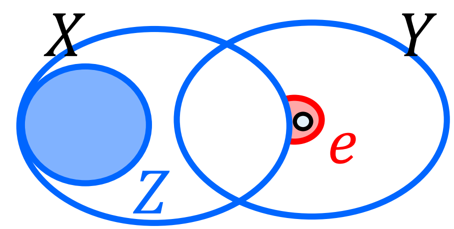
- $\rho(\mathcal{F}), \mu(\mathcal{F})$ ともに $\left\{\begin{array}{l}\text{マトロイドからの遠さ}\\\text{最適化のしやすさ}\end{array}\right\}$ の指標

成果 1. ロバスト比の上界: 難しい例

タイプ	w_e	p_e	個数	p_e/w_e	p の合計
0	M^{2T}	M^{2T}	1	1	M^{2T}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	M^{2T-2i}	M^{2T-i}	M^{2i}	M^{i}	M^{2T+i}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T	1	M^{T}	M^{2T}	M^{T}	M^{3T}

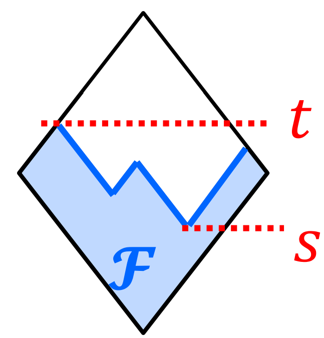


$\rightarrow\ \boldsymbol{\mu}(\mathcal{F}) = \boldsymbol{M^{2M}}, \boldsymbol{\rho}(\mathcal{F}) = \boldsymbol{M^{2M}}$



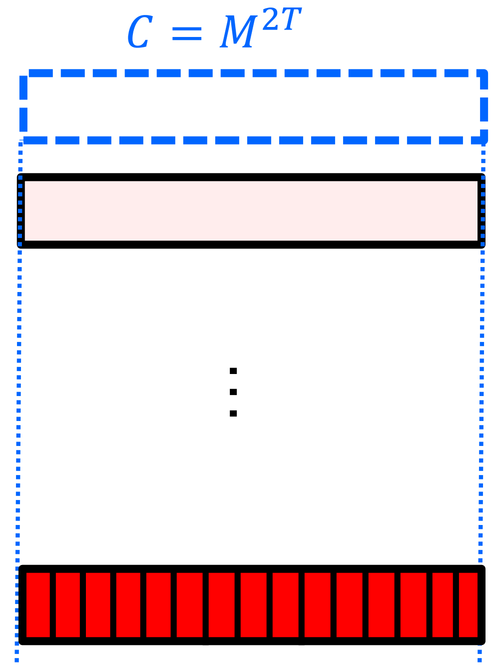
定理 [再]

任意の混合戦略のロバスト比 $\leq \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T+1}} + \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{M}}$



成果 1. ロバスト比の上界: 難しい例

タイプ	w_e	p_e	個数	p_e/w_e	p の合計
0	$M^{2\boldsymbol{M}}$	$M^{2\boldsymbol{M}}$	1	1	$M^{2\boldsymbol{M}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$M^{2\boldsymbol{M}-2i}$	$M^{2\boldsymbol{M}-i}$	M^{2i}	M^{i}	$M^{2\boldsymbol{M}+i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T=\boldsymbol{M}$	1	$M^{\boldsymbol{M}}$	$M^{2\boldsymbol{M}}$	$M^{\boldsymbol{M}}$	$M^{3\boldsymbol{M}}$



➔ $\boldsymbol{\mu}(\mathcal{F}) = \boldsymbol{M^{2M}}, \boldsymbol{\rho}(\mathcal{F}) = \boldsymbol{M^{2M}}$

$$\log M^{2M} = \Theta(M \log M)$$

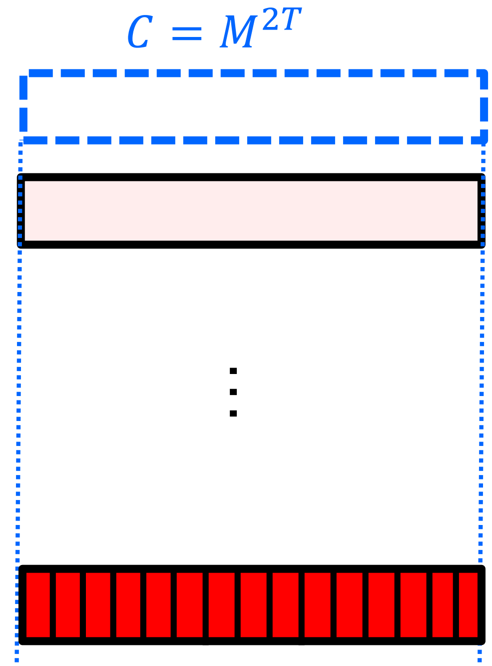
$$\log\log M^{2M} = \Theta(\log M)$$

定理 [再]

任意の混合戦略のロバスト比 $\leq \dfrac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{M}}$

成果 1. ロバスト比の上界: 難しい例

タイプ	w_e	p_e	個数	p_e/w_e	p の合計
0	M^{2M}	M^{2M}	1	1	M^{2M}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	M^{2M-2i}	M^{2M-i}	M^{2i}	M^{i}	M^{2M+i}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$T = M$	1	M^{M}	M^{2M}	M^{M}	M^{3M}



➔ $\mu(\mathcal{F}) = M^{2M}, \rho(\mathcal{F}) = M^{2M}$

$$\log M^{2M} = \Theta(M \log M)$$

$$\log\log M^{2M} = \Theta(\log M)$$

定理 [本研究]

任意の混合戦略のロバスト比 $\leq \dfrac{3}{M} \begin{cases} = O\left(\dfrac{\log\log \mu(\mathcal{F})}{\log \mu(\mathcal{F})}\right) \\ = O\left(\dfrac{\log\log \rho(\mathcal{F})}{\log \rho(\mathcal{F})}\right) \end{cases}$

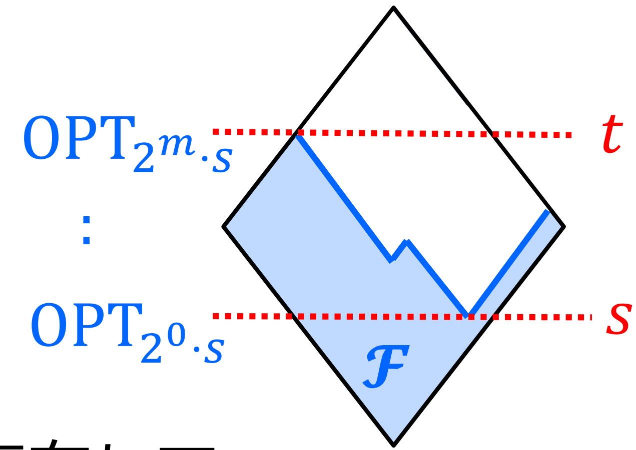
成果 2-1. ロバスト比の下界: $\Omega\left({}^{1}/_{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$

混合戦略 (A) $m := \lceil \log \rho(\mathcal{F}) \rceil$

- $\forall i \in \{0,1,\ldots,m\}$ について, $\boldsymbol{X_i = \mathrm{OPT}_{2^i \cdot s}}$ を**確率** $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m+1}}$ で選択

定理 [本研究]

(A) のロバスト比 $\geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m+1}} = \boldsymbol{\Omega}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\log \rho(\mathcal{F})}}\right)$



[略証] $s \leq k < 2^m \cdot s$ の場合:

$\boldsymbol{2^i \cdot s \leq k < 2^{i+1} \cdot s}$ なる $i \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ が存在して,

$$\boldsymbol{p\left(\mathrm{OPT}_{2^i \cdot s}(k)\right)} = p\left(\mathrm{OPT}_{2^i \cdot s}\right) \geq p\left(\mathrm{OPT}_k\left(2^i \cdot s\right)\right) \geq \frac{2^i \cdot s}{k} p\left(\mathrm{OPT}_k\right) \geq \frac{\boldsymbol{p(\mathrm{OPT}_k)}}{\mathbf{2}},$$

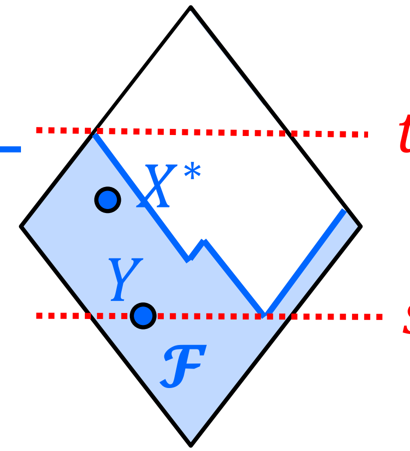
$$\boldsymbol{p\left(\mathrm{OPT}_{2^{i+1} \cdot s}(k)\right)} \geq \frac{k}{2^{i+1}} p\left(\mathrm{OPT}_{2^{i+1} \cdot s}\right) \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{p(\mathrm{OPT}_k)}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}[\boldsymbol{p(X_k)}] \geq \frac{1}{m+1}\left(p\left(\mathrm{OPT}_{2^i \cdot s}\right) + p\left(\mathrm{OPT}_{2^{i+1} \cdot s}\right)\right) \geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m+1}} \boldsymbol{p(\mathrm{OPT}_k)} \qquad \blacksquare$$

成果 2-2. ロバスト比の下界: $\Omega\left({}^{1}/_{\log \mu(\mathcal{F})}\right)$

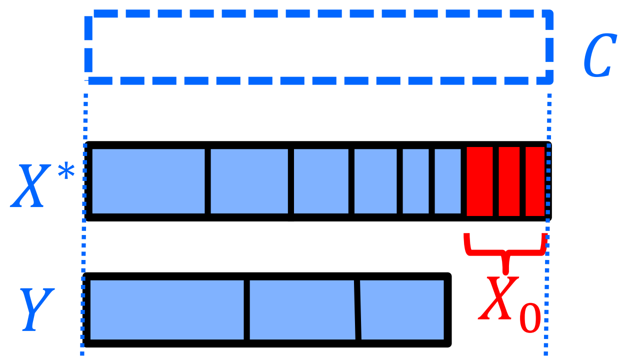
混合戦略 (B)

1. X^*: 最適解, Y: w の大きい順に s 個
2. $X_0 \subseteq X$: $w(X_0) \le C - w(Y)$ でアイテム数最大
3. $C' \coloneqq C - w(X_0)$, $E' \coloneqq E - X_0$, $m' \coloneqq \left\lceil \frac{\log|X^* - X_0|}{s} \right\rceil$
4. $\forall i \in \{0,1,\ldots,m'\}$ について, $\mathbf{OPT'}_{2^i \cdot s} \cup X_0$ を**確率** $\frac{1}{m'+1}$ で選択



定理 [本研究]

(B) のロバスト比 $\ge \frac{1}{4(m'+1)} = \Omega\left(\frac{1}{\log \mu(\mathcal{F})}\right)$



cf. 純粋戦略: $\frac{1}{\sqrt{\mu(\mathcal{F})}}$ [垣村, 牧野 13]

目次

- **導入**: ロバスト・ナップサック

- **先行研究**
  - Hassin, Rubinstein [2002]: ロバスト・マッチング
  - 垣村, 牧野 [2013]: ロバスト・独立システム
  - Matuschke, Skutella, Soto [2015]: 混合戦略

- **本研究**: **ロバスト・ナップサックに対する混合戦略**
  - ロバスト比の上界・下界
  - 純粋戦略のロバスト比を改善

- **まとめ・今後の課題**

まとめ・今後の課題

- **本研究: ロバスト・ナップサックの混合戦略**
  1. **ロバスト比の上界** $\mathbf{O}\left(\frac{\log\log\mu(\mathcal{F})}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$, $\mathbf{O}\left(\frac{\log\log\rho(\mathcal{F})}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$
  2. **ロバスト比の下界** $\boldsymbol{\Omega}\left(\frac{1}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$, $\boldsymbol{\Omega}\left(\frac{1}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$: 混合戦略を設計

     ⇒ 3. **独立システム**に拡張: $\mathbf{O}\left(\frac{1}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$, $\mathbf{O}\left(\frac{1}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$, $\boldsymbol{\Omega}\left(\frac{1}{\log\rho(\mathcal{F})}\right)$

- **今後の課題**
  1. 上界と下界のギャップ
  2. 独立システムの $\Omega\left(\frac{1}{\log\mu(\mathcal{F})}\right)$-ロバスト混合戦略
  3. Rank quotient $r(\mathcal{F})$ による評価

$$r(\mathcal{F}) := \min_{X\subseteq E}\frac{\max\{|X\text{ 内の極大許容解}|\}}{\min\{|X\text{ 内の極大許容解}|\}}$$