一般グラフのマッチングとその周辺

高澤 兼二郎

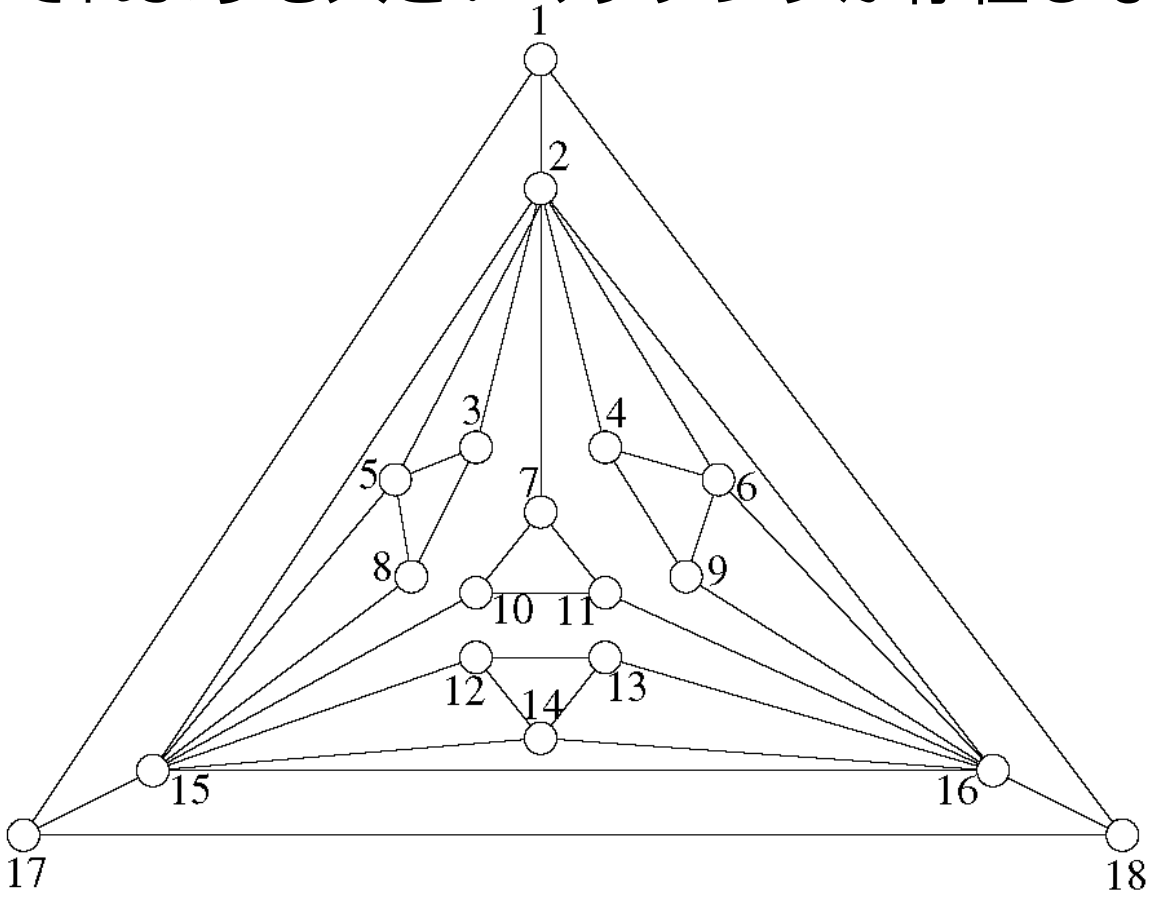
京都大学 数理解析研究所

第 11 回 組合せ最適化セミナー
2014 年 7 月 30 日

今日の目標

(1) 最大マッチングをひとつ示せ

(2) それが最大マッチングであることを示せ
(= それよりも大きいマッチングが存在しないことを示せ)



Goemans 2013

目次

◆ 2部グラフのマッチング
- Kőnig の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング
- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全単模性

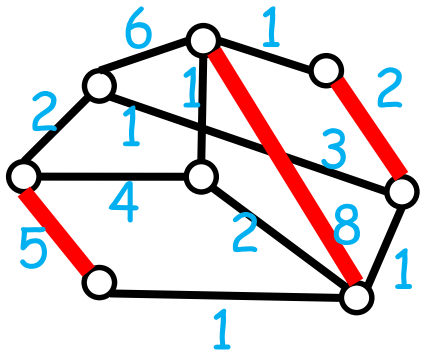
◆ 一般グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

◆ 周辺の話題

マッチング問題

無向グラフ $G = (V, E)$　枝重み $w: E \to \mathbf{R}_+$

頂点集合　枝集合



$w(M) = 2+8+5 = 15$

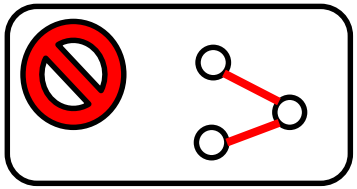
定義

$M \subseteq E$ が マッチング

$\Leftrightarrow$ Mの枝は端点を共有しない

問題

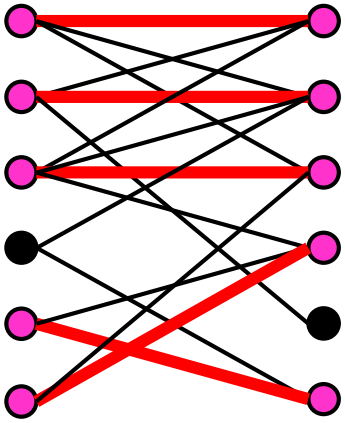
$|M|$ 最大のマッチング M を求めよ



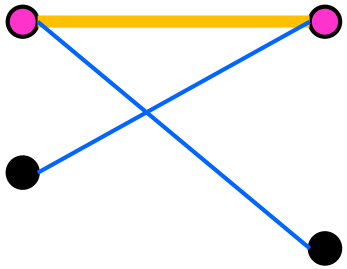
$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ 最大のマッチング M を求めよ

◆ 多項式時間可解　Edmonds 1965 など

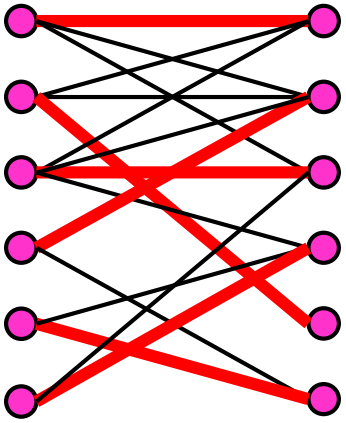
交互道



M



P



MΔP

定義

Mに関する交互道: M と E-M の枝が交互に現れる道

Mに関する増加道: 交互道で，両端点がMに接続しない

P が M-増加道 ➔ $M' = M \Delta P = (M - P) \cup (P - M)$はマッチングで

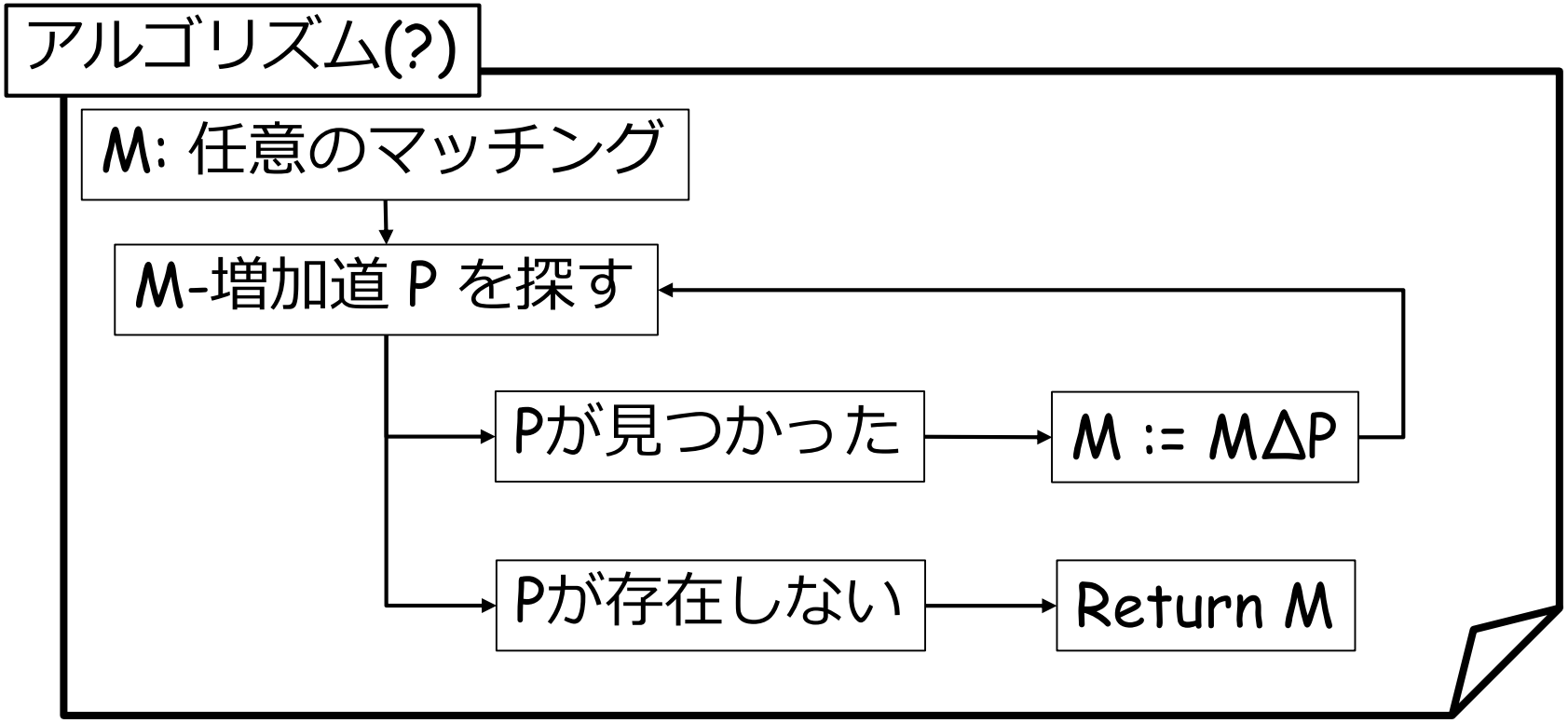
$|M'| = |M|+1$

増加道アルゴリズム (?)

定理

M が最大マッチング ⇔ M-増加道が存在しない

【演習】証明せよ



存在しないことの証明

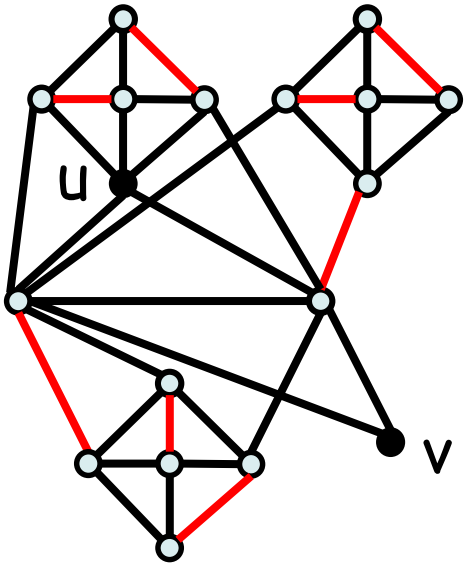
定理

M が最大マッチング ⇔ M-増加道が存在しない

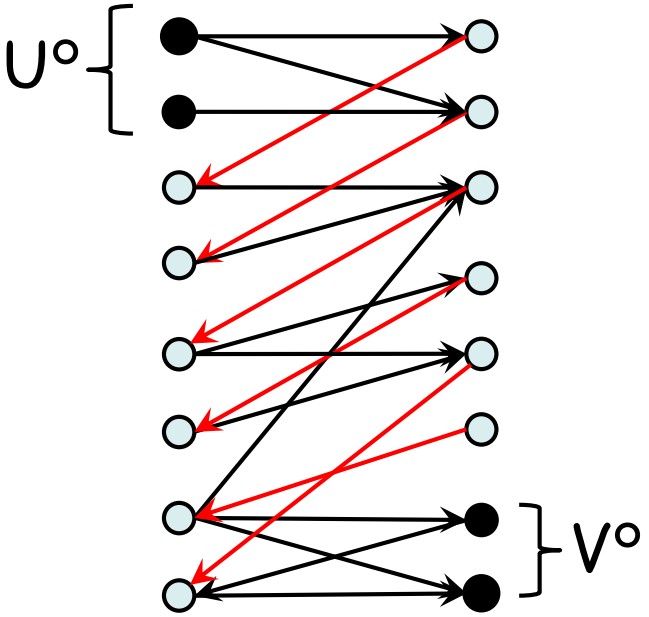
「○○が存在しない」ことを説明するには・・・??

(^_^;) 「探したけど増加道ありません」
(°⊿°) 「は？ ちゃんと探せや」

(^O^) 「全探索したけどありません！
(u → v の全頂点列ﾄﾞﾊﾞｰ)」
(°⊿°) 「こんなにたくさんチェックできん,
やり直し」



2部グラフの場合

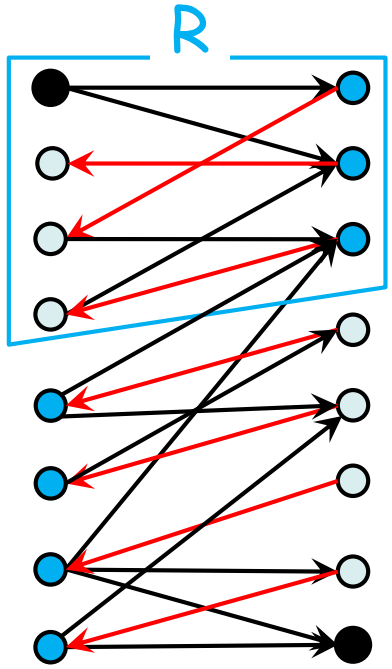


$G = (U \cup V, E)$

- E – M の枝: U→V の向き付け
- M の枝: V→U へ向き付け

- M-交互道 ⟺ 有向道
- M-増加道 ⟺ U°-V° 有向道

- M-増加道が存在 ⟺ U°からV°へ到達可能

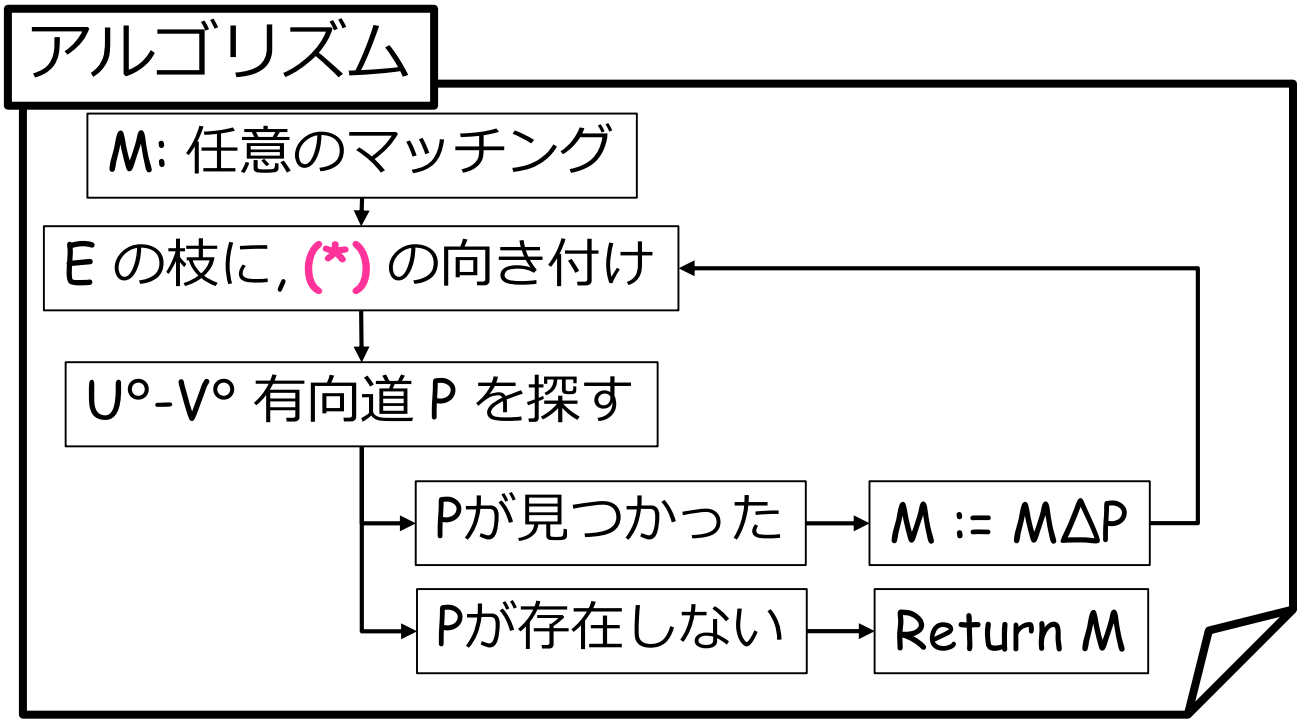


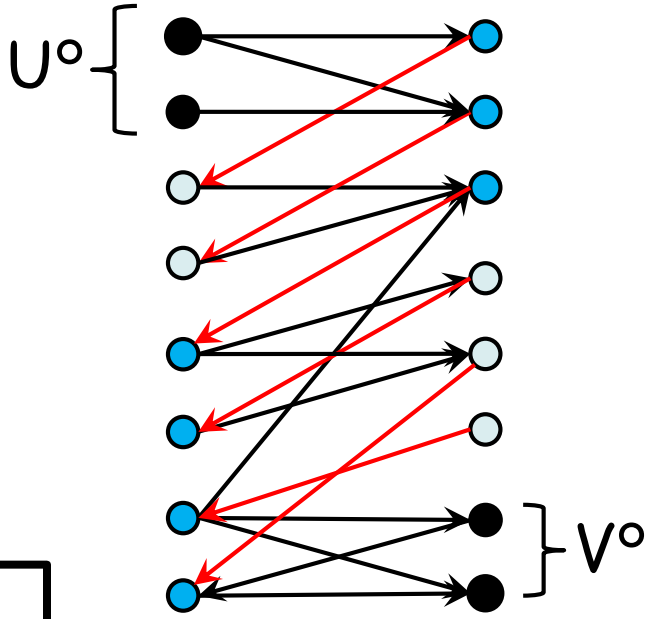
- R := U°から到達可能な頂点の集合
  $R \cap V° = \emptyset$ ➔ M-増加道は存在しない
  ➔ M は最大マッチング

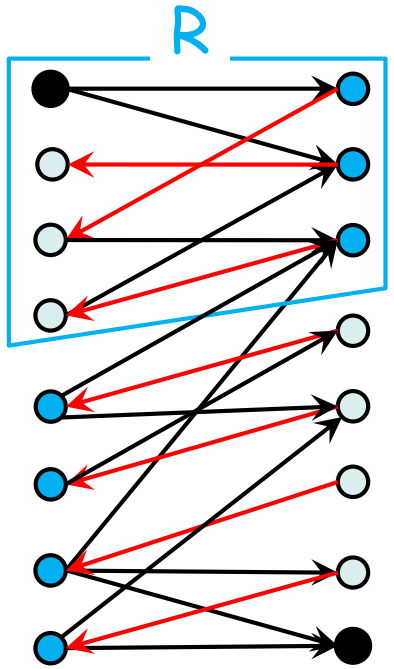
2部グラフのアルゴリズム

$G = (U \cup V, E)$

- E – M の枝: U→V の向き付け
- M の枝: V→U へ向き付け (*)





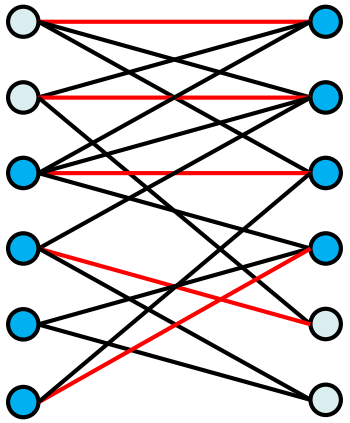


マッチング と 点被覆

定義

$C \subseteq U \cup V$ が 点被覆

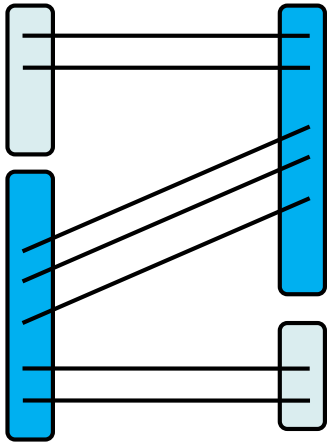
$\Leftrightarrow$ E のすべての枝は C に端点をもつ



命題 M はマッチング, C は点被覆

➔ $|M| \leq |C|$

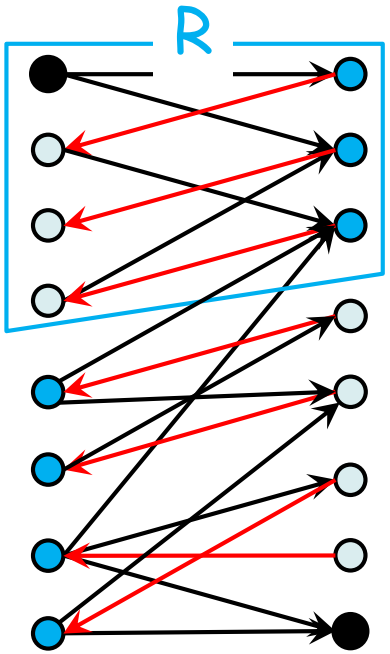
- 点被覆 C ➔ $|C|$ はマッチングサイズの上限
- $|M| = |C|$ が成立すれば
  - M は最大マッチング
  - C は最小点被覆



最大マッチング と 最小点被覆

アルゴリズム終了時: $U°$-$V°$ 有向道なし

$R \subseteq U \cup V$: $U°$ から有向道で到達可能
$C := (U - R) \cup (V \cap R)$



命題
- C は点被覆
- $|M| = |C|$

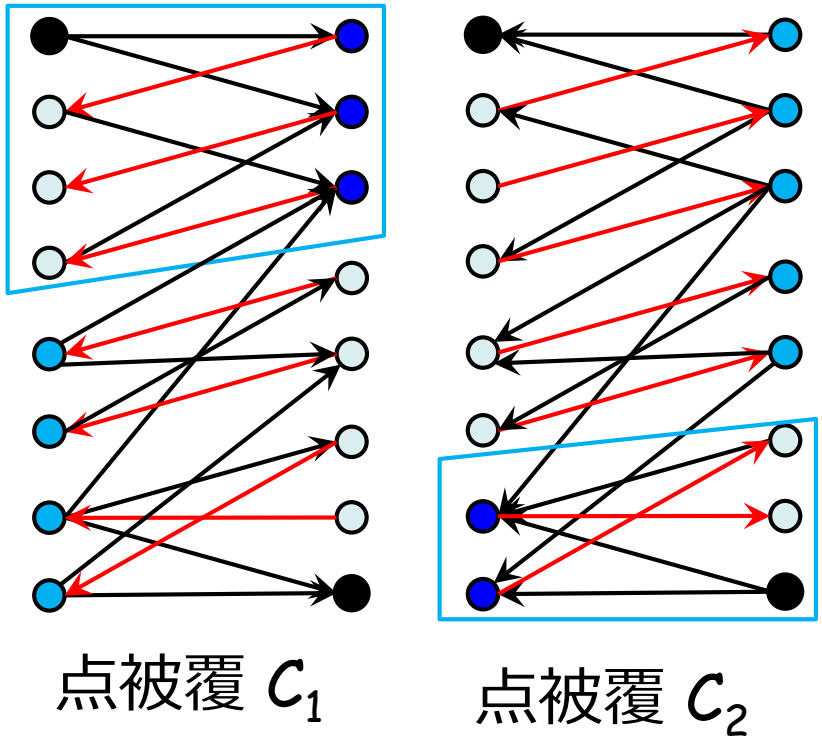
定理 [Kőnig 1931]

$\max\{|M| : M$ はマッチング$\} = \min\{|C| : C$ は点被覆$\}$

最小点被覆全体の構造: DM分解

Dulmage-Mendelsohn 分解

- $C \subseteq U \cup V$ が最小点被覆
  - ➔ ● $\in C$
  - .
  - .
  - .



点被覆 C_1　　点被覆 C_2

C_1, C_2 はともに最小点被覆

- 浅野: **情報の構造 上**. 日本評論社, 1994
- 伊理, 藤重, 大山: **グラフ・ネットワーク・マトロイド**, 産業図書, 1986
- K. Murota: ***Matrices and Matroids for Systems Analysis***, Springer, 2010

完全マッチングの存在判定

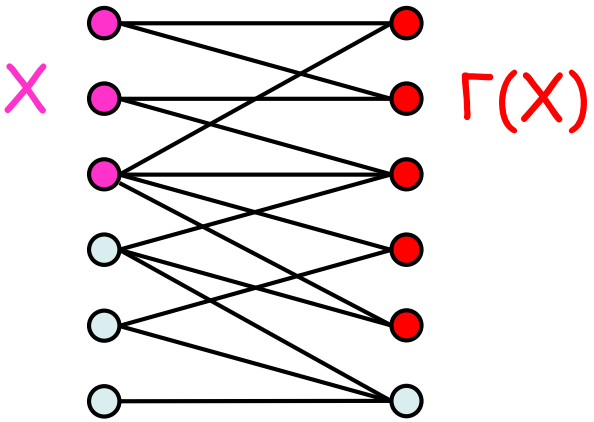
定理 [Hall 1935]

G が完全マッチングをもつ $\Leftrightarrow$ $|\Gamma(X)| \geq |X|$ $^{\forall}X \subseteq U$

【演習】証明せよ

$G = (U \cup V, E)$, $X \subseteq U$

$\Gamma(X) := \{ v \in V : \exists u \in X, uv \in E \}$



ここまでのまとめ

- 最大マッチング ⟺ 増加道が存在しない
- 存在しないことの証明は (一般には) 難しい
- ２部グラフ: 向き付け + パス探索 で存在判定可能
- 最大最小定理による最適性の証明

  $\max\{|M| : M \text{ はマッチング}\} = \min\{|C| : C \text{ は点被覆}\}$

  - $\max \leq \min$ を示す
  - $|M| = |C|$ をみたす M, C 求めるアルゴリズムを設計

  ➔ $\max = \min$ の証明 & アルゴリズムの正しさの保証

目次

◆ 2部グラフのマッチング
- Kőnig の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング
- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

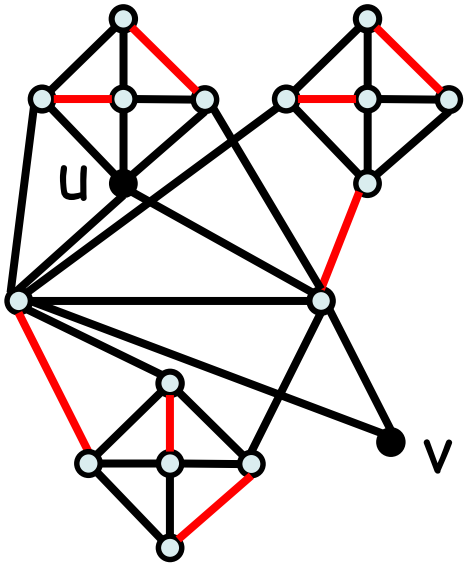
◆ 周辺の話題

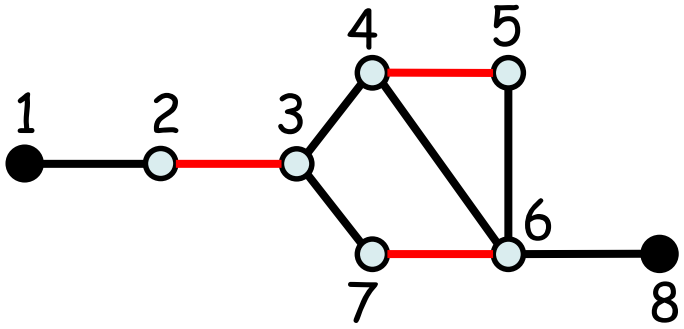
一般グラフのマッチング

定理

M が最大マッチング ⇔ M-増加道が存在しない

- 一般グラフでも成立
- 増加道の探索・存在判定 が難しい
  - 向き付けができない
  - 各枝はどちら向きにも通れる





探索: 1→2→3→4→5→6→7 …

➔増加道なし??

最大最小定理

Tutte 1947, Berge 1958

定理 [Tutte-Berge 公式]

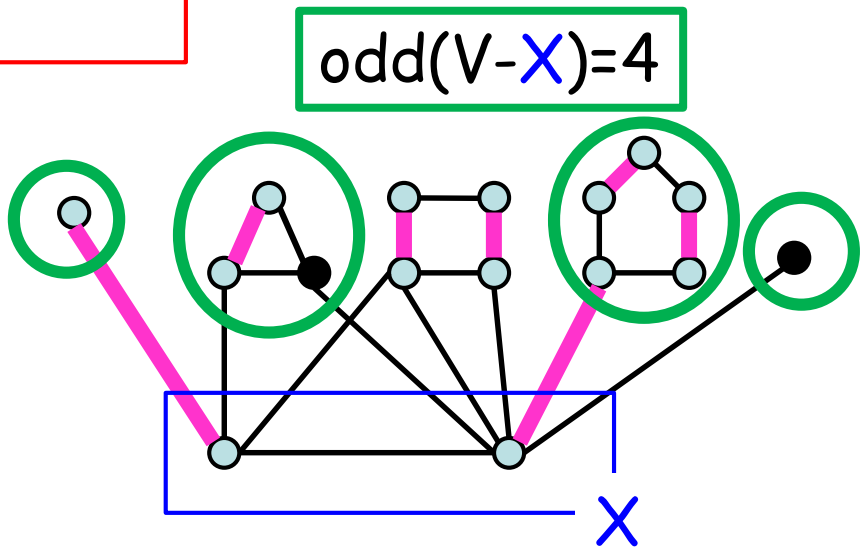
$$\max\{|M| : M \text{ はマッチング}\}$$

$$= \min_{X \subseteq V} \frac{1}{2}\{|V| + |X| - \mathrm{odd}(V - X)\}$$

頂点数奇数の成分数

- $\max \le \min$
- 等号でみたす M, X

➔ M, X は最適解



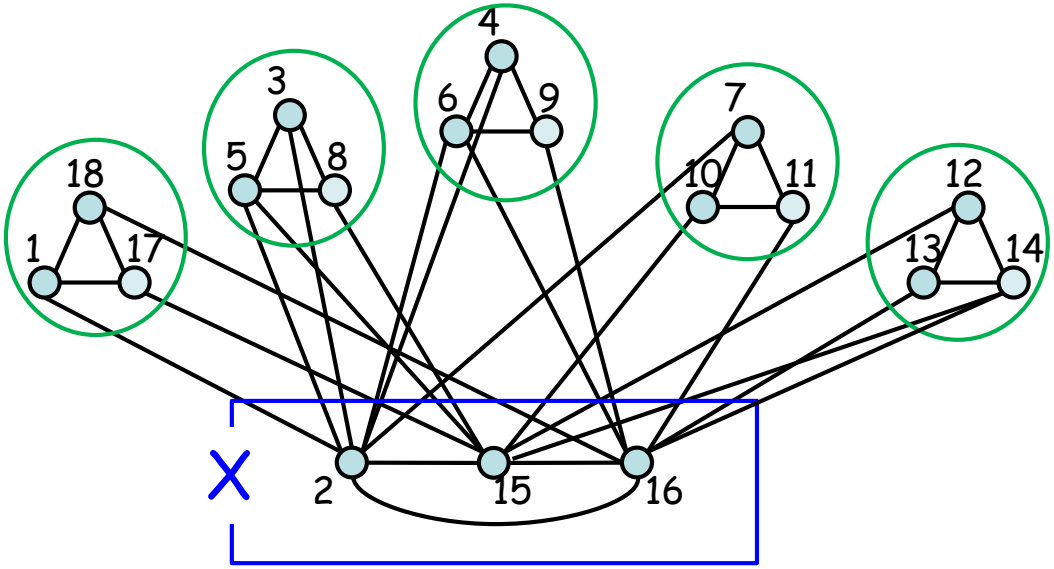
定理 [Tutte の定理]

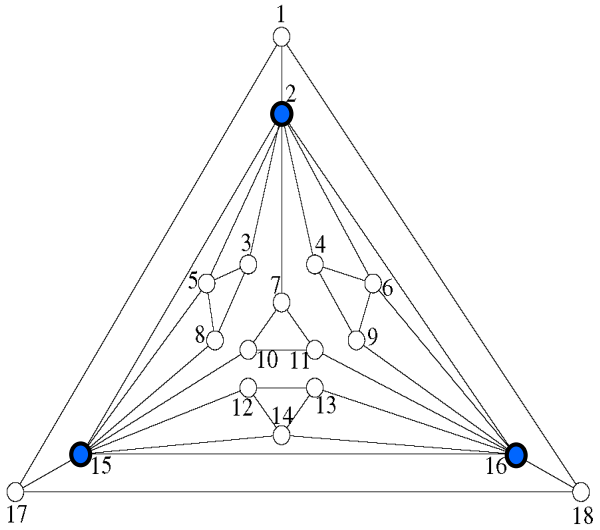
G が完全マッチングをもつ

$\Longleftrightarrow \mathrm{odd}(V - X) \le |X| \quad \forall X \subseteq V$

冒頭の問題 の 答え

X = {2, 15, 16} ➔ odd(V-X) = 5



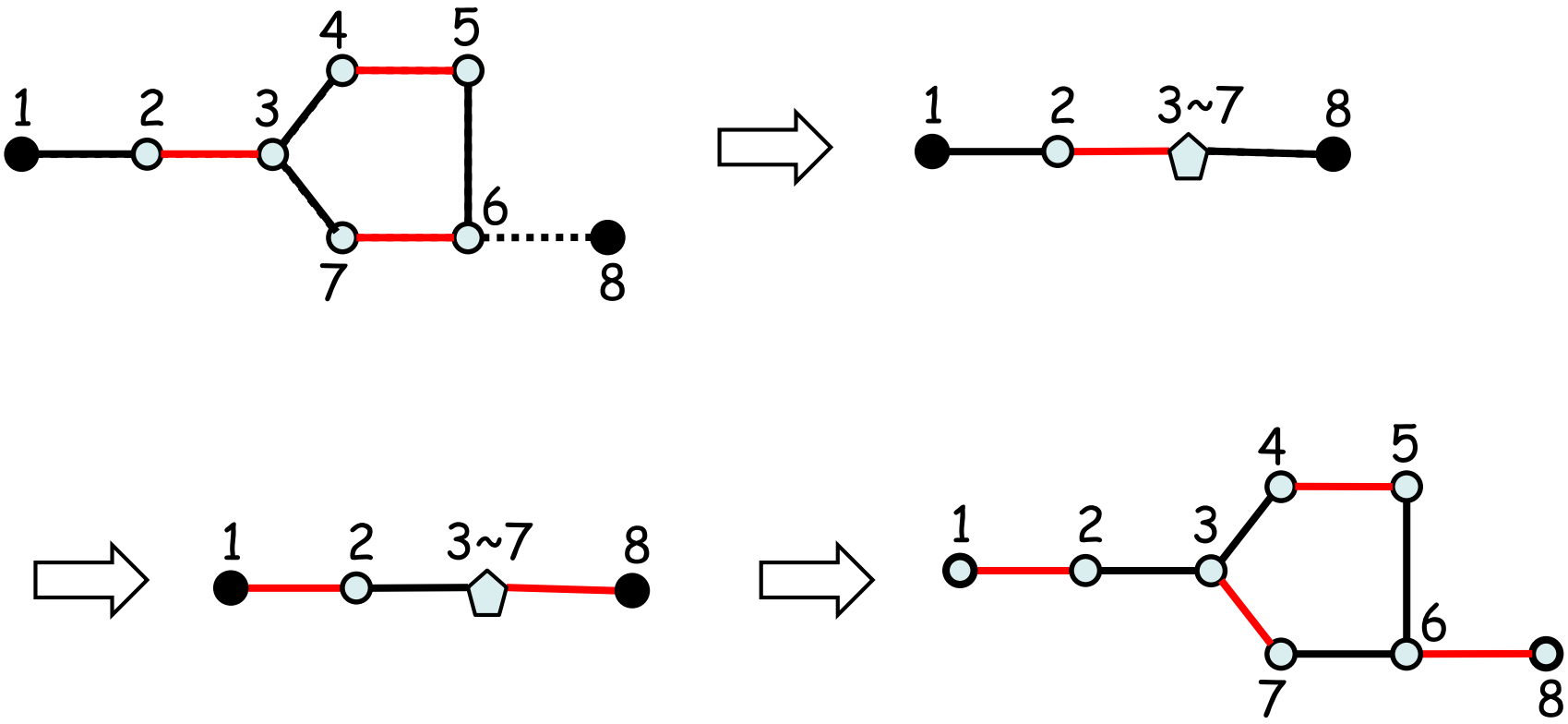


∀M, |M| ≤ (|V| + |X| - odd(V-X))/2 = (18 + 3 – 5)/2 = 8

➔ |M|=8 のマッチングMが見つかっていれば最適解
(Xも最適解)

ブロッサム・アルゴリズム: 縮約・増加

Edmonds 1965



命題 ∀奇閉路 C は factor-critical

∀v, C − v は完全マッチングをもつ

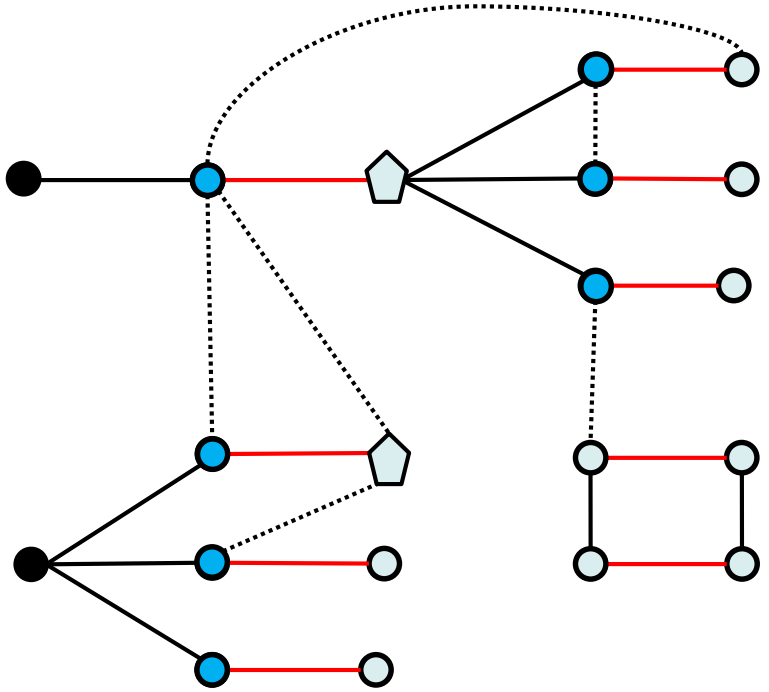
ブロッサム・アルゴリズム: 終了時

Edmonds 1965

X = {●から奇数長の交互道で
たどり着く頂点}

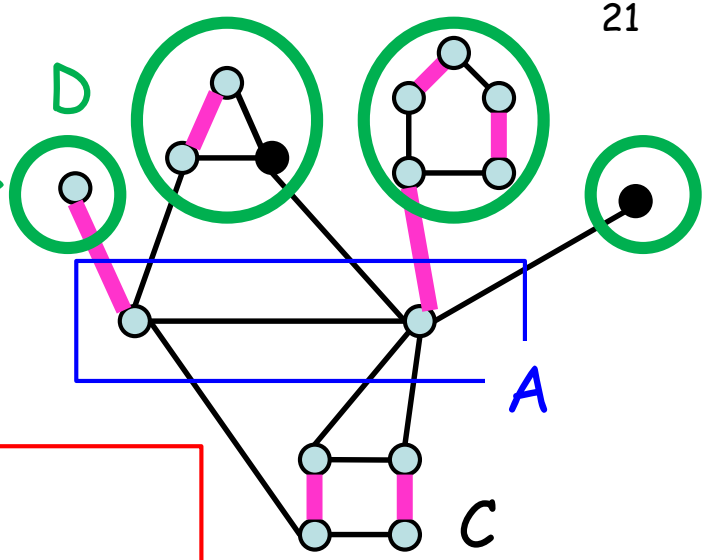
➔ $|M| = \frac{1}{2}(|V| + |X| - \mathrm{odd}(V-X))$

➔ M, X はそれぞれ最適解
Tutte-Berge 公式の構成的証明



Edmonds-Gallai 分解

D = {v∈V : v を被覆しない最大マッチングが存在}
A = {v∈V-D : vはDの頂点に隣接}
C = V - D - A



定理 [Edmonds-Gallai 分解]

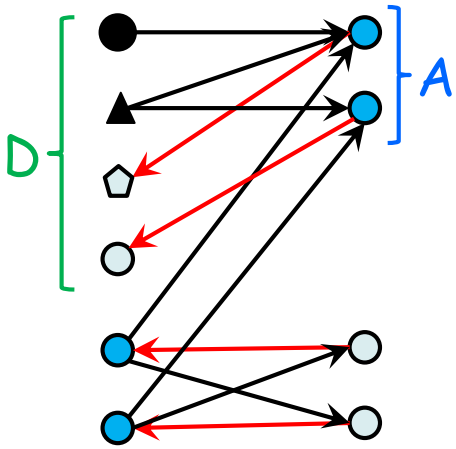
(1) G[D] の連結成分は factor-critical

(2) G[C] は完全マッチングをもつ

(3) C を削除, E[A] を削除, G[D] の連結成分を縮約 して得られる2部グラフにおいて, Γ(X) - |X| ≥ 1 ∀X⊆A

(4) M: G の最大マッチング ➔
- M[D]: 各連結成分の near-perfect matching
- M[C]: G[C] の完全マッチング
- M[A]: A の頂点は D の異なる連結成分とマッチ

(5) max{|M|} = (|V| - #component(D) + |A|)/2



ここまでのまとめ

- 最大マッチング ⟺ 増加道が存在しない
- 一般グラフ: 増加道の存在判定は難しい
- 最大最小定理による最適性の証明

$$\max\{|M| : M \text{ はマッチング}\} = \frac{1}{2} \min\{|V| + |X| - \mathrm{odd}(V-X)\}$$

  - ➢ max ≤ min を示す
  - ➢ 左辺 = 右辺 をみたす M, X 求めるアルゴリズムを設計

➔ max = min の証明 & アルゴリズムの正しさの保証

目次

◆ 2部グラフのマッチング
- Kőnig の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング
- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

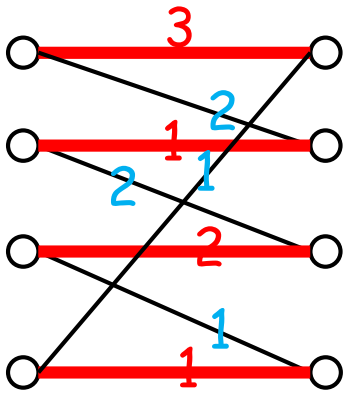
◆ 周辺の話題

2部グラフの重みつきマッチング

$G = (U \cup V, E)$
$w : E \to \mathbf{R}_{\geq 0}$

問題

- w(M) 最大のマッチング M
- w(M) 最小の完全マッチング M



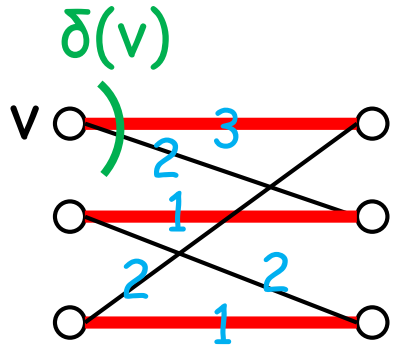
$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$

- 多項式時間可解 (Hungarian method など)

最小重み完全マッチングの整数計画表現

変数 $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^E$: マッチングの特性ベクトル

$$\begin{cases} x(e) = 1 \rightarrow e \in M \\ x(e) = 0 \rightarrow e \in E - M \end{cases}$$



$\boldsymbol{x}$ = (1 0 1 0 0 1)

- $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)x(e)$

IP_{min}

minimize	$\sum_{e \in E} w(e)\, x(e)$	
subject to	$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$	$\forall v \in U \cup V$
	$x(e) \in \{0,1\}$	$\forall e \in E$

線形計画緩和 と 整数最適解

LP_{min}

minimize $\sum_{e \in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v \in U \cup V$

$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E$

- $OPT(LP_{min}) \leq OPT(IP_{min})$

定理 [Birkhoff 1946 など]

G が 2部グラフのとき，(LP_{min}) は 整数最適解 x^* をもつ

(LP_{min}) を解いて 整数最適解 x^* を求める
➔ x^* は (IP_{min}) の最適解
(最小重み完全マッチングの特性ベクトル)

整数性の証明

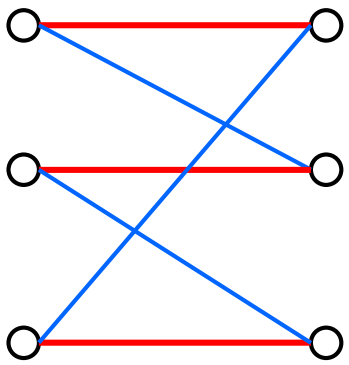
$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v\in U\cup V$
$x(e) \geq 0 \quad \forall e\in E$

定理 [Birkhoff 1946 など]

G が 2部グラフのとき，(LP_{min}) の制約式は完全マッチング多面体を定める

【証明】

- x：制約式が定める多面体 Q の端点
- $F = \{e\in E \mid x(e) > 0\}$
- F が閉路 C を含むとする
  - ➔ C の長さは偶数
  - ➔ C はマッチング M, N の disjoint union
  - ➔ $x + \varepsilon(\chi_M - \chi_N), x - \varepsilon(\chi_M - \chi_N) \in Q$
  - ➔ x が Q の端点であることに矛盾
- F は閉路を含まない ➔ $x(e) = 1 \ \forall e\in F$



【証明終】

最大重みマッチングの線形計画表現

LP

maximize $\sum_{e \in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leq 1$ $\quad \forall v \in U \cup V$

$x(e) \geq 0$ $\quad \forall e \in E$

定理

G が 2部グラフのとき,
(LP) は 整数最適解 x* をもつ,
i.e., (LP) の制約式はマッチング多面体を定める

【演習】証明せよ
Hint: (LP_{min}) の整数性を使ってよい

LP の最適性保証：双対定理

LP

maximize $\sum_{e \in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \le 1 \quad \forall v \in U \cup V$

$x(e) \ge 0 \quad \forall e \in E$

Dual-LP $y \in \mathbf{R}^{U \cup V}$

minimize $\sum_{v \in U \cup V} y(v)$

subject to $y(u) + y(v) \ge w(e) \quad \forall e = uv \in E$

$y(v) \ge 0 \quad \forall v \in U \cup V$

- OPT(LP) = OPT(Dual-LP)

- (LP) の許容解 x が最適解

  ⇔ 相補性条件をみたす (Dual-LP) の許容解 y が存在:

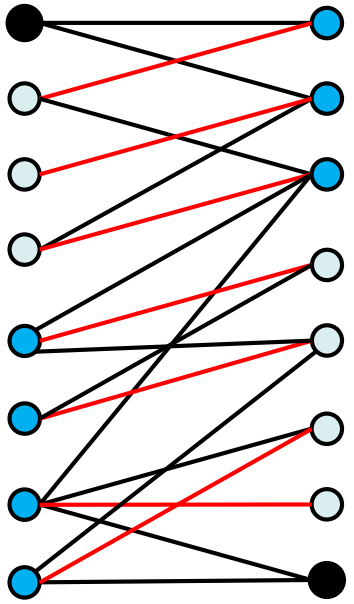
  - $x(e) > 0$ ➔ $y(u) + y(v) = w(e)$
  - $y(v) > 0$ ➔ $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$

双対最適解 = “最小点被覆”

$w(e) = 1$ $^{\forall}e$ の場合

Dual-LP

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{v \in U \cup V} y(v) \\ \text{subject to} \quad & y(u) + y(v) \geq 1 \qquad {}^{\forall}e = uv \in E \\ & y(v) \geq 0 \qquad {}^{\forall}v \in U \cup V \end{aligned}$$



$y(\bullet) = 1$
$y(\circ) = 0$

- 最小点被覆問題の線形緩和
  - ✓ $y \in \{0,1\}^{U \cup V}$ ➔ y は点被覆の特性ベクトル

命題 (Dual-LP) は整数最適解をもつ

【略証】

- $OPT(IP) = OPT(LP) = OPT(Dual\text{-}LP) \leq OPT(Dual\text{-}IP)$
- $OPT(IP) = OPT(Dual\text{-}IP)$ ■

- 相補性条件
  - $x(uv) = 1$ ➔ $y(u) + y(v) = 1$
  - $y(v) = 1$ ➔ $\sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$

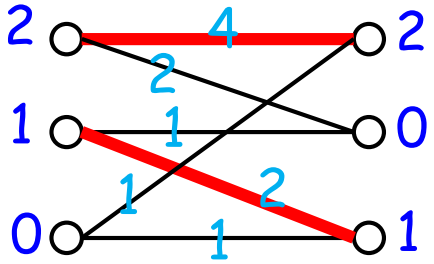
x: 最大マッチング
y: 最小点被覆

双対最適解 = “最小点被覆”

$w(e) \in \mathbb{Z}$ $\forall e$ の場合

Dual-LP

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{v \in U \cup V} y(v) \\ \text{subject to} \quad & y(u) + y(v) \geq w(e) \quad \forall e = uv \in E \\ & y(v) \geq 0 \quad \forall v \in U \cup V \end{aligned}$$



- 最小点被覆問題の一般化

定理[Egerváry 1931]

w が整数ならば, (Dual-LP) は整数最適解をもつ

- 相補性条件
  - $x(uv) = 1 \rightarrow y(u) + y(v) = w(e)$
  - $y(v) \in \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1$

x: 最大重みマッチング
y: “最小点被覆”

係数行列 の 完全単模性

Total unimodularity
Totally unimodular

A：n×m 行列

定義

A が 完全単模 (完全単模性をもつ)

⇔ A の任意の正方小行列の行列式が 0, +1 or -1

定理

A が 完全単模 n×m 行列, $b \in \mathbb{Z}^n$

⇒ $P = \{x \mid Ax \leq b\}$ は整数多面体

整数格子点の凸包

定理

A が 完全単模 n×m 行列, $b \in \mathbb{Z}^n$, $c \in \mathbb{Z}^m$

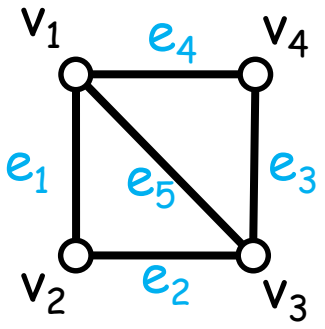
⇒ $\max \{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min \{yb \mid yA \geq c, y \geq 0\}$

両辺は 整数最適解 をもつ

(※両辺は実行可能とする)

接続行列の完全単模性

$G = (V,E)$
$A(G)$: G の接続行列



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	0	0	1	1
v_2	1	1	0	0	0
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	1	1	0

定理

$A(G)$ が 完全単模 $\Longleftrightarrow$ G は2部グラフ

【演習】証明せよ

LP

maximize $\sum_{e\in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\sum_{e\in\delta(v)} x(e) \le 1 \quad \forall v \in U \cup V$

$x(e) \ge 0 \quad \forall e \in E$

$A(G)\, x \le 1$

ここまでのまとめ

G: 2部グラフ

(IP) 最大重みマッチング

$$\max.\ wx \quad \text{s.t.}\ \ Ax \le 1,\ x \in \{0,1\}^E$$

$=$

(IP-Dual) “最小点被覆“

$$\min.\ 1y \quad \text{s.t.}\ \ yA \ge w,\ y \in \mathbf{Z}^{U \cup V}$$

線形緩和

$\|$ A の完全単模性 $\|$

(LP)

$$\max.\ wx \quad \text{s.t.}\ \ Ax \le 1,\ x \ge 0$$

$=$
(双対定理)

(LP-Dual)

$$\min.\ 1y \quad \text{s.t.}\ \ yA \ge w,\ y \ge 0$$

目次

◆ 2部グラフのマッチング
- Kőnig の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング
- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

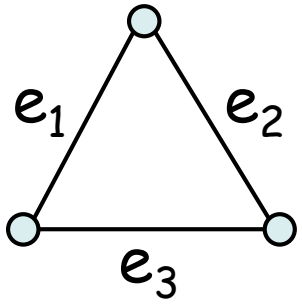
◆ 周辺の話題

最小重み完全マッチング

(IP_{min})

$$\text{min.} \quad \sum w(e)\, x(e)$$

$$\text{sub. to} \quad \sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \qquad \forall v \in V$$
$$x(e) \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E$$



$({}^{\times}LP_{min})$

$$\text{min.} \quad \sum w(e)\, x(e)$$

$$\text{sub. to} \quad \sum_{e \in \delta(v)} x(e) = 1 \qquad \forall v \in V$$
$$x(e) \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

(IP): 許容解なし

(LP): $x = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$

$$OPT(IP_{min}) > OPT({}^{\times}LP_{min})$$

最小重み完全マッチングの線形計画表現

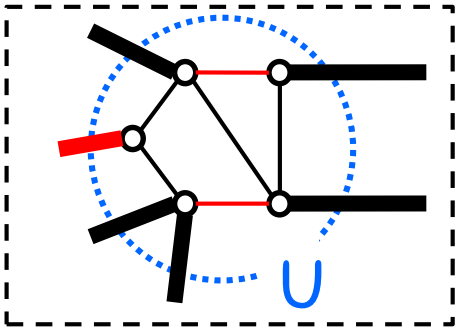
(LP_{min})

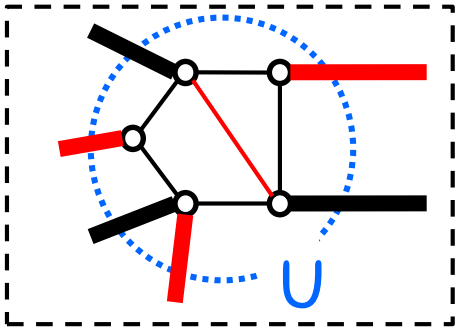
min. $\sum w(e)\, x(e)$

sub. to $\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad {}^{\forall}v\in V$

$\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad {}^{\forall}U\subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$

$x(e) \geq 0 \quad {}^{\forall}e\in E$





定理 [Edmonds 1965]

(LP_{min}) は 整数最適解 x^* をもつ
i.e., (LP_{min}) の制約式は整数多面体を定める

整数性の証明

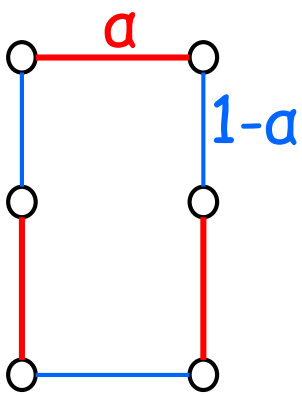
$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v\in V$$
$$\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad \forall U\subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$$
$$x(e) \geq 0 \quad \forall e\in E$$

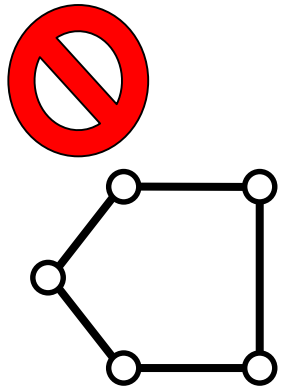
定理 [Edmonds 1965]

(LP_{min}) の制約式は完全マッチング多面体を定める

【証明】P＝完全マッチング多面体, Q＝制約式が定める多面体

- $P\subseteq Q$: 簡単
- $Q\subseteq P$ を示す．$x\notin P$ をみたす Q の頂点 x が存在したとする
  - $|V|+|E|$ 最小の例をとる
    - ➔ $0 < x(e) < 1 \quad \forall e\in E$
    - ➔ $\deg(v) \geq 2 \quad \forall v\in V$
    - ➔ $|E| \geq |V|$
  - ◆ $|E| = |V|$ の場合
    - ➔ 閉路の disjoint union
    - ➔ 完全マッチングの凸結合





二つ目の制約に矛盾

整数性の証明

$Q(G)$

$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v\in V$
$\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad \forall U\subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$
$x(e) \geq 0 \quad \forall e\in E$

◆ $|E| > |V|$ の場合

- x は $|E|$ 本の制約を等号でみたす

  ➔ $\exists U\subseteq V,\ x(\delta U) = 1$ and $3 \leq |U| \leq |V| - 3$

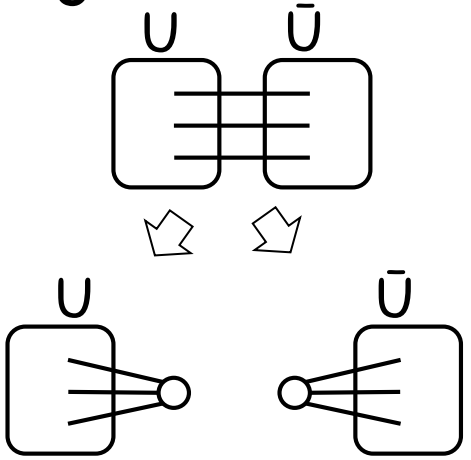
- x', x'' : x の $G/\bar{U}$, G/U への射影

  ➔ $x'\in Q(G/\bar{U}) = P(G/\bar{U})$
  $x''\in Q(G/U) = P(G/U)$

  ➔ $x' = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \chi_{M'(i)}$, $x'' = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \chi_{M''(i)}$

  ➔ $\forall i\in[k],\ M'(i)\cap\delta U = M''(i)\cap\delta U$ としてよい

  ➔ $\forall i\in[k]$, $M(i) = M'(i)\cup M''(i)$ は G の完全マッチングで
  $x = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \chi_{M(i)}$ となって矛盾



【証明終】

最大重みマッチングの線形計画表現

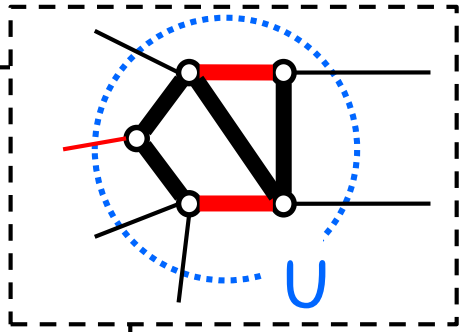
(LP)

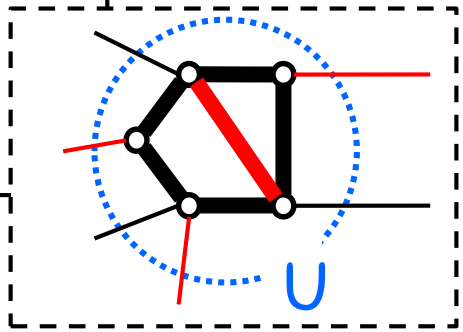
max. $\sum w(e)\, x(e)$

sub. to $\sum_{e\in\delta(v)} x(e) \le 1 \quad \forall v \in V$

$\sum_{e\in E[U]} x(e) \le \frac{|U|-1}{2} \quad \forall U \subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$

$x(e) \ge 0 \quad \forall e \in E$





定理 [Edmonds 1965]

(LP) は 整数最適解 x^* をもつ
i.e., (LP) の制約式は整数多面体を定める

【演習】証明せよ

双対問題

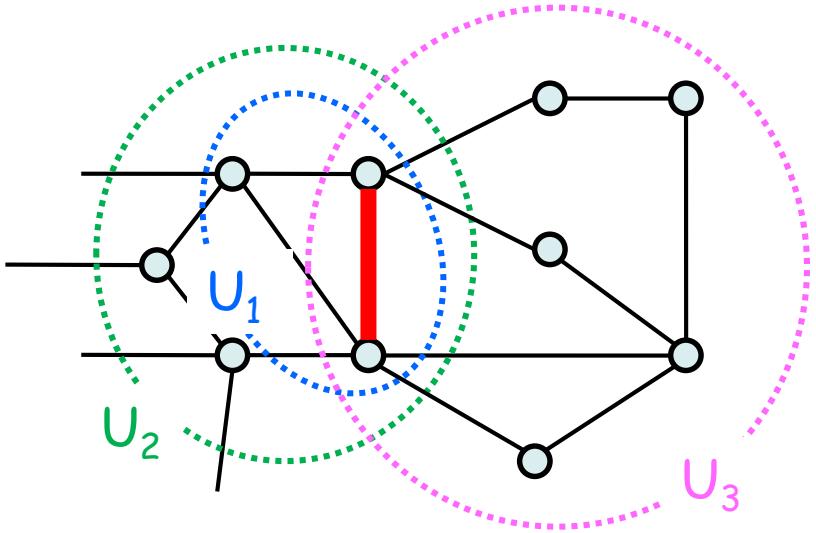
(Dual-LP)

min. $\Sigma_{v\in V}\, y(v) + \Sigma_U \frac{|U|-1}{2}\, z(U)$

sub. to $y(u) + y(v) + \Sigma_{U:\, u,v\in U}\, z(U) \geq w(e)$ $\forall e=uv\in E$

$y(v) \geq 0$ $\forall v\in V$

$z(U) \geq 0$ $\forall U\subseteq V, |U|$ is odd



完全双対整数性

$y(u) + y(v) + \sum_{U:\, u,v \in U} z(U) \geq w(e)$
$y(v) \geq 0$
$z(U) \geq 0$

定理 [Cunningham & Marsh 1978]

w が整数のとき, (Dual-LP) は 整数最適解 (y, z) をもつ
さらに, $\mathcal{F} = \{U \subseteq V \mid z(U) > 0\}$ がラミナー集合族をなす
整数最適解が存在する

$U_1, U_2 \in \mathcal{F}$
➔ $U_1 \subseteq U_2$ or $U_1 \supseteq U_2$ or $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

定理

(LP) の制約式は 完全双対整数性 をもつ

Rational system $Ax \leq b$ が完全双対整数性をもつ
⟺ $\min\{ yb \mid y \geq 0, yA = c\}$ が任意の整数ベクトル c
に対して整数最適解をもつ

ここまでのまとめ

G: 一般グラフ

(LP)

$$\max.\ wx$$
$$\text{s.t.}\quad Ax \le 1,$$
$$x(E[U]) \le \frac{|U|-1}{2}$$
$$x \ge 0$$

- マッチング多面体を定める
- 完全双対整数性をもつ

➔ (LP), (Dual-LP) ともに整数最適解をもつ

‖ (双対定理)

(Dual-LP)

$$\min.\ \Sigma_v y(v) + \Sigma_U \frac{|U|-1}{2} z(U)$$
$$\text{s.t.}\quad y(u) + y(v) + \Sigma_{U \ni u,v} z(U) \ge w,$$
$$y, z \ge 0$$

目次

◆ 2部グラフのマッチング
- Kőnig の定理
- 増加道アルゴリズム

◆ 一般グラフのマッチング
- Tutte-Berge 公式
- Edmonds のアルゴリズム
- Edmonds-Gallai 分解

◆ 2部グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全単模性

◆ 一般グラフの重みつきマッチング
- マッチング多面体
- 完全双対整数性
  (Cunningham-Marsh公式)

◆ 周辺の話題

参考文献

- 浅野: **情報の構造 上**. 日本評論社, 1994.
- 伊理, 藤重, 大山: **グラフ・ネットワーク・マトロイド**. 産業図書, 1986.
- L. Lovász, M.D. Plummer: ***Matching Theory***, AMS Chelsea Publishing, 2009.
- K. Murota: ***Matrices and Matroids for Systems Analysis***, Springer, 2010.
- G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: ***Integer and Combinatorial Optimization***, Wiley, 1988.
- A. Schrijver: ***Combinatorial Optimization---Polyhedra and Efficiency***, Springer, 2003.
- 高澤: マッチング. 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顯 (編), **応用数理ハンドブック**, 朝倉書店, 2013, pp. 288-289.

Related Topic

Finding 2-Factors Closer to TSP Tours in Cubic Graphs

Sylvia Boyd (U. Ottawa)
Satoru Iwata (U. Tokyo)
Kenjiro Takazawa (Kyoto U.)

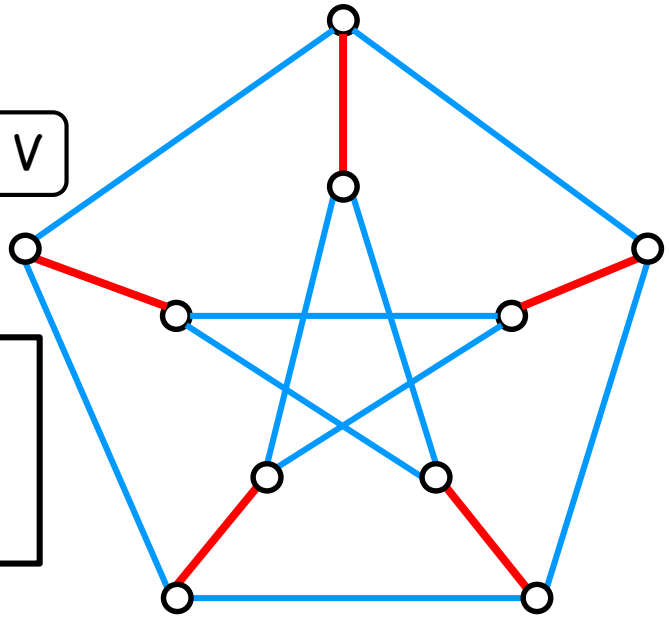
11th COSS
July 30, 2014

Petersen's Theorem [1891]

G=(V,E): Bridgeless Cubic Graph

= 2-edge-connected

deg(v) = 3 for every v in V



Thm.

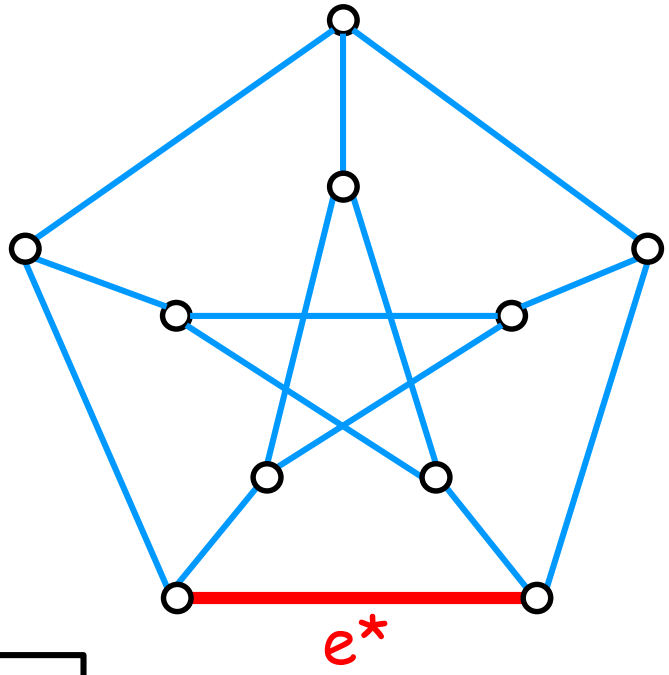
Every bridgeless cubic graph has a perfect matching

⇕

Every bridgeless cubic graph has a 2-factor

Schönberger's Theorem [1935]

G=(V,E): Bridgeless Cubic Graph
e* in E



Thm.

G has a perfect matching including e*

⇕

G has a 2-factor excluding e*

- $O(n \log^4 n)$ algorithm
  [Biedl, Bose, Demaine, Lubiw 2001]

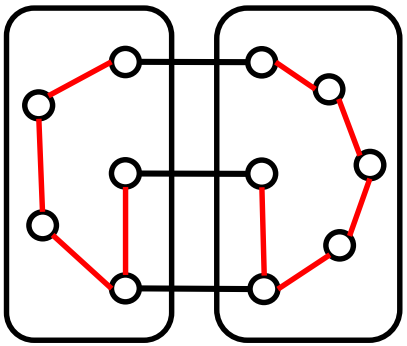
n = |V|

Kaiser & Škrekovski's Theorem

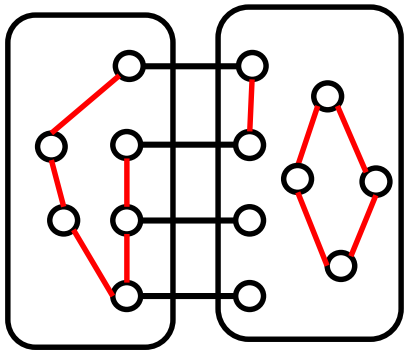
[2008]

$G=(V,E)$: Bridgeless Cubic
e^* in E

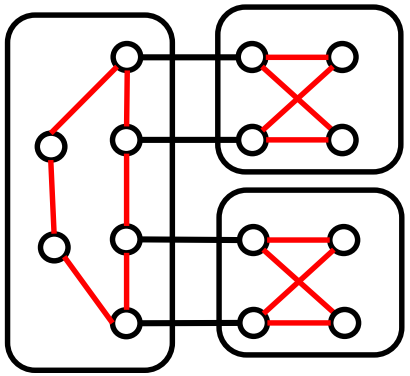
Thm. G has a 2-factor excluding e^* and covering all 3- and 4-edge cuts



3-edge cut



4-edge cut



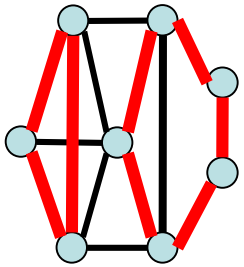
Not a 4-edge cut

2-factors and TSP Tours

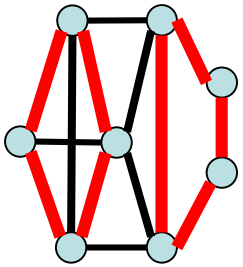
- TSP tour = 2-factor of one cycle of length n

➔ 2-factor without cycles of length k or less :

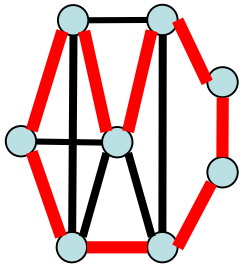
Relax $C_{\leq k}$-free 2-factor (in simple graphs)



☹



✓ $C_{\leq 3}$-free



✓ $C_{\leq 4}$-free

k = n/2 ➔ TSP tour

Complexity of $C_{\leq k}$-free 2-factors

	Unweighted	Weighted
$k \geq 5$	NP-hard [Papadimitriou '80]	NP-hard
$k = 4$	(a) OPEN	(b) NP-hard [Vornberger '80]
$k = 3$	(c) P [Hartvigsen '84]	(d) OPEN
$k = 2$	P	P

- Subcubic graphs
  - (a) : P [Bérczi & Végh '10]
  - (c) : P [Bérczi & Végh '10, Hartvigsen & Li '11]
  - (d) : P [Vornberger '80, Kobayashi '10, Hartvigsen & Li '13]
- Bipartite graphs
  - (a) : P [Hartvigsen '06, Pap '07]
  - (b) : NP-hard for general weight [Király 00]
    P if the weight hass a special property [Makai '07, T. '09]

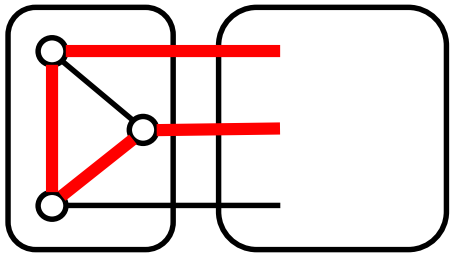
2-factors Covering Cuts

- TSP tour = 2-factor covering all edge cuts
  - ➔ 2-factor covering prescribed edge cuts

Relax

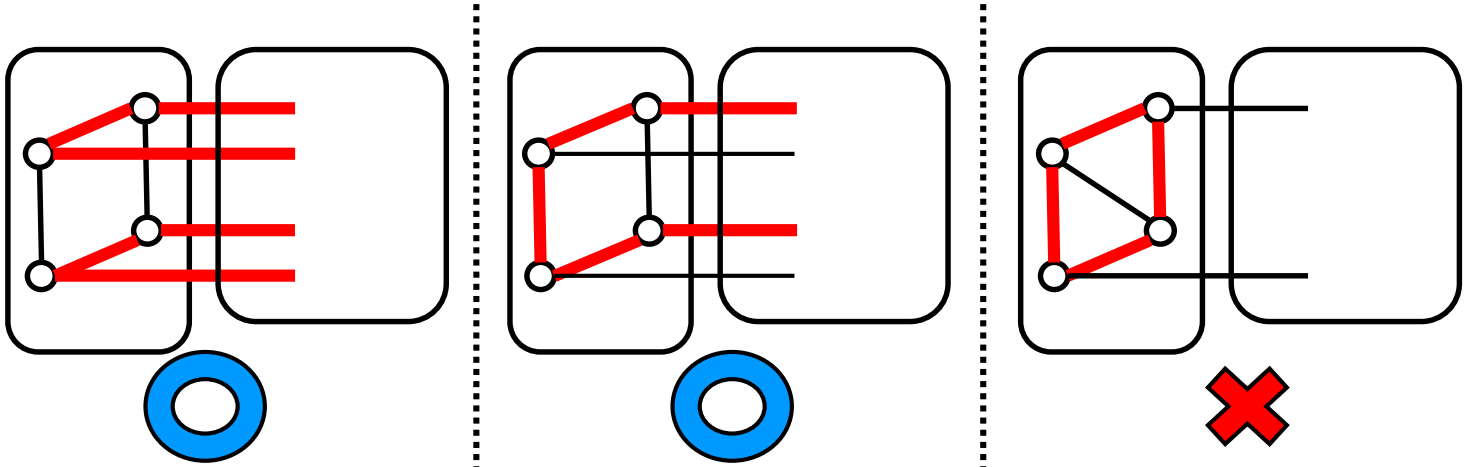
G: Cubic

- 2-factor covering all 3-edge cuts
  - ➔ $C_{\leq 3}$-free



G: 3-edge-connected cubic

- 2-factor covering all 3,4-edge cuts ➔ $C_{\leq 4}$-free



Our Results

(1) - An $O(n^3)$-algorithm for finding a *min.-weight* 2-factor covering all 3-edge cuts in bridgeless cubic graphs
- Polyhedral description

(2) An $O(n^3)$-algorithm for finding a 2-factor covering all 3-, 4-edge cuts in bridgeless cubic graphs

- Constructive proof for [Kaiser, Škrekovski 2008]

Application

(3) A 6/5-approx. algorithm for the minimum 2-edge-connected subgraph problem in 3-edge-connected cubic graphs

- Start with the 2-factor found by Algorithm (2)
- Previous ratio: 5/4 for 3-edge-connected cubic graphs [Huh 2004]

Contents

- Introduction

(1) - An $O(n^3)$-algorithm for finding a *min.-weight* 2-factor covering all 3-edge cuts in bridgeless cubic graphs
- Polyhedral description

- Summary

---

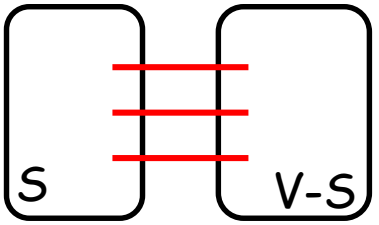
(1) - 2辺連結3正則グラフにおける,
すべての3辺カットと丁度 1 本の辺で交わる
完全マッチングで最小重みのものを求めるアルゴリズム
- 多面体的表現

3-カット完全マッチング

多面体的表現

$$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad {}^{\forall}v\in V$$
$$\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad {}^{\forall}U\subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$$
$$x(e) \geq 0 \quad {}^{\forall}e\in E$$
$$\sum_{e\in\delta(S)} x(e) = 1 \quad {}^{\forall}S\subseteq V,\ \delta(S) \text{ is a proper 3-edge cut}$$

- A 3-edge cut $\delta(S)$ is proper
  $\Leftrightarrow$ $2 \leq |S| \leq n - 2$



定理

上記の制約式は 3-カット完全マッチング多面体を定める

【証明】
P＝3-カット完全マッチング多面体, Q＝制約式が定める多面体

- $P\subseteq Q$: 簡単

多面体的表現

Q

$\sum_{e\in\delta(v)} x(e) = 1 \quad \forall v\in V$

$\sum_{e\in\delta(U)} x(e) \geq 1 \quad \forall U\subseteq V,\ |U| \text{ is odd}$

$x(e) \geq 0 \quad \forall e\in E$

$\sum_{e\in\delta(S)} x(e) = 1 \quad \forall \delta(S)$: proper 3-edge cut

- $Q\subseteq P$ を示す:
  $x^*\in Q$ を3-カット完全マッチングの凸結合で表す
- $x^*\in Q\subseteq$[完全マッチング多面体]

  ➔ $x^* = \sum_i \lambda_i \chi_{Mi}$: 完全マッチング $\{M_i\}$ の凸結合

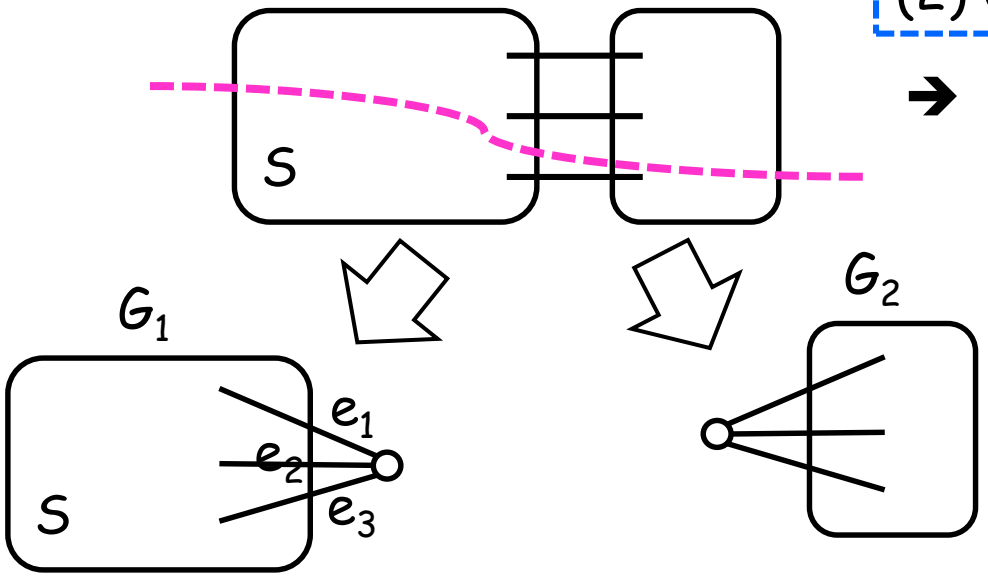
- $\sum_{e\in\delta(S)} x^*(e) = 1$
- $\sum_{e\in\delta(S)} \chi_{Mi}(e) \geq 1$ ➔ $\sum_{e\in\delta(S)} \chi_{Mi}(e) = 1 \ \forall i$
- i.e., M_i は 3-カット完全マッチング $\forall i$ 【証明終】

アルゴリズム

(1) Find a proper 3-edge cut δ(S)

(2) Contract V – S, S

➔ Smaller bridgeless cubic graphs



(3) For i = 1,2,3, find a min.-weight perfect matching M_i including e_i

(4) For i = 1,2,3, let $w(e_i) := w(M_i)$

(5) Recurse in G_2 ➔ N
➔ return $M = M_i \cup N$

M intersects all 3-cuts with 1 edge : Proven by submodularity

Summary

- For bridgeless cubic graphs:
  - A 2-factor covering all 3- and 4-edge cuts: Algorithm
  - A min-weight 2-factor covering all 3-edge cuts:
    - ✓ Algorithm
    - ✓ Polyhedral description

- For 3-edge-connected cubic graphs
  - 6/5-approx. algorithm for the min. 2-edge-connected subgraph problem

Open Problems

Min-weight 2-factor covering all 3- and 4-edge cuts in bridgeless cubic graphs

6/5-approx. algorithm for the min. 2-edge-connected subgraph problem in ***bridgeless*** cubic graphs