予算ゲーム と 混雑ゲーム の共通の一般化

清末 風雅　SCSK (株)
高澤 兼二郎　法政大

2022.12.06 コンピュテーション研究会 @ 愛媛大

予算ゲーム: 例

[Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2015]

プレイヤー i の**戦略**

- $S = \{r_1, r_2\}$
- $S' = \{r_1, r_3\}$

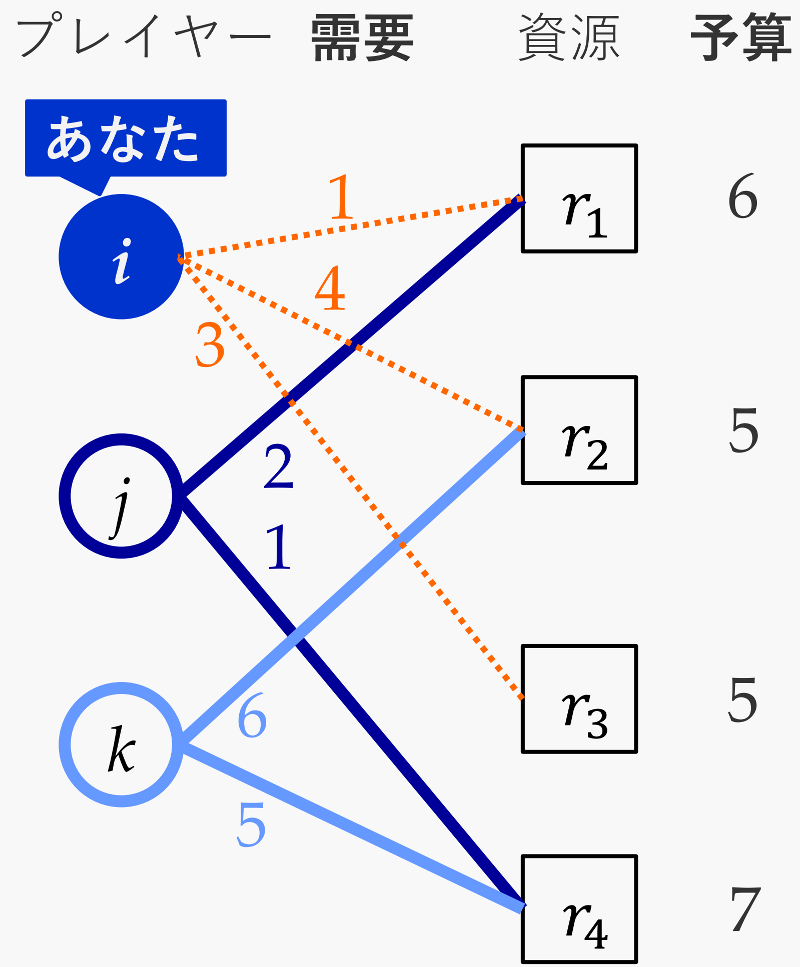
資源 r から得る**効用**

- r への総需要が r の予算を超えない

▶▶ 効用 = 需要そのもの

- r への総需要が r の予算を超える

▶▶ 効用 = 予算を需要に比例して配分



予算ゲーム: 例

[Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2015]

プレイヤー i の**戦略**

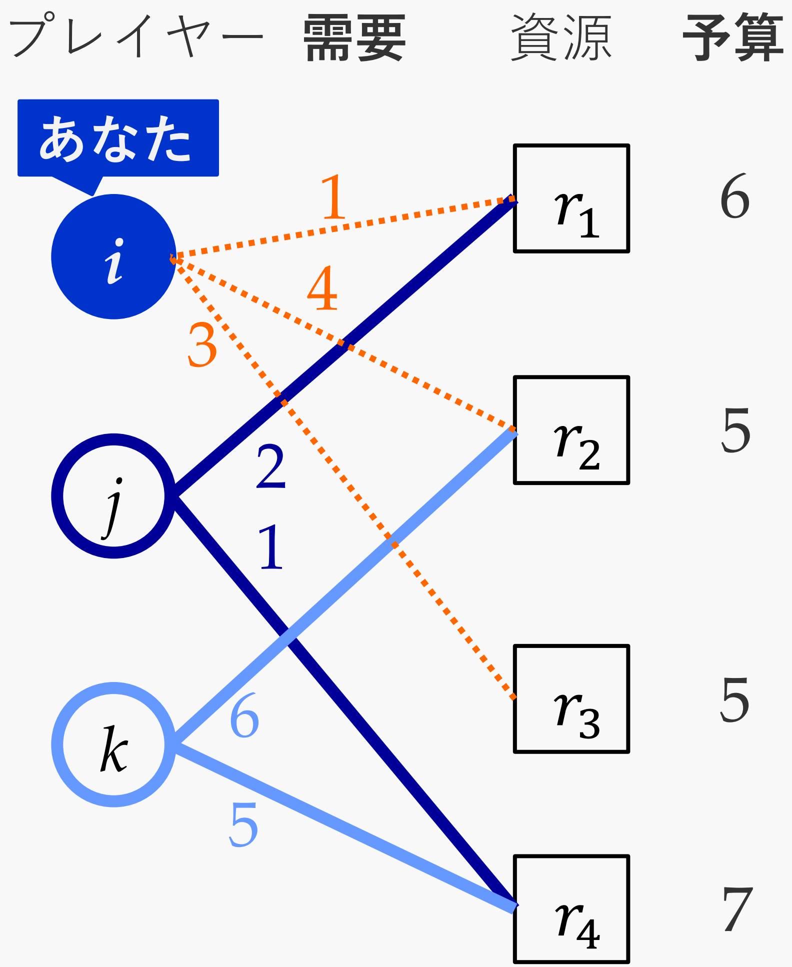
- $S = \{r_1, r_2\}$
- $S' = \{r_1, r_3\}$

プレイヤー i が各資源から得る**効用**

- $r_1 : 1$
- $r_2 : 5 \cdot \frac{4}{4+6} = 2$
- $r_3 : 3$

プレイヤー i の各戦略の**効用**

- $S :\ 1 + 2 = 3$
- $S' : 1 + 3 = 4$



予算ゲーム：モデル

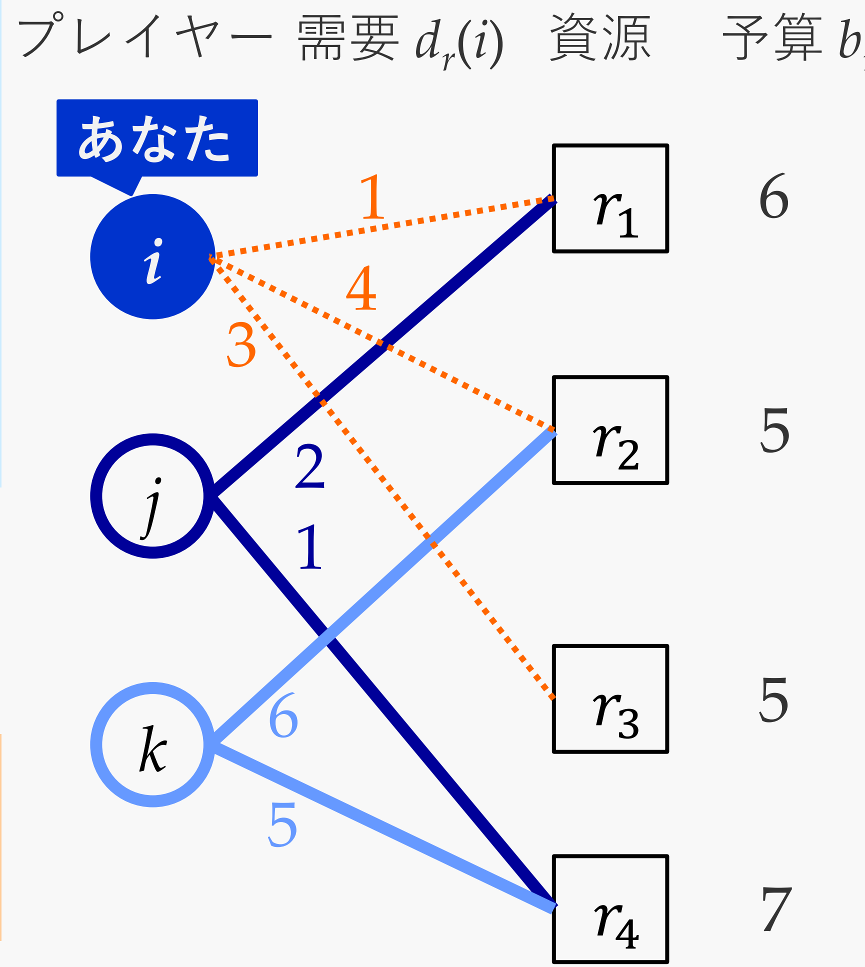
[Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2015]

- **プレイヤー**の集合 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- **資源**の集合 R
- $i \in N$ の**戦略** $S_i \subseteq R$
- $i \in N$ の**戦略空間** $\mathcal{S}_i \subseteq 2^R$
- $i \in N$ の $r \in R$ への**需要** $d_r(i) \in \mathbf{R}$
- $r \in R$ の**予算** $b_r \in \mathbf{R}$

- **状態** $\boldsymbol{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$
- r への総需要 $d_r(\boldsymbol{S}) = \sum_{i : r \in S_i} d_r(i)$

効用 $u_{i,r}(\boldsymbol{S}) = \min\left\{d_r(i), d_r(i) \cdot \frac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S})}\right\}$

合計効用 $u_i(\boldsymbol{S}) = \sum_{r \in S_i} u_{i,r}(\boldsymbol{S})$



本研究

動機: 予算ゲームと混雑ゲーム [Rosenthal 1973] の類似性

- 一つの資源への**プレイヤー数の増加 ▶▶ 効用の減少 (コストの増加)**
- 戦略空間の**マトロイド構造 ▶▶ 純粋ナッシュ均衡**
- **理論的な考察: なし**

提案モデル: 一般化予算ゲーム

- 予算ゲームと混雑ゲームの共通の一般化

定理: 純粋ナッシュ均衡

- 戦略空間の**マトロイド構造 ▶▶ 純粋ナッシュ均衡**
- 特殊ケースに対する $O(n)$ 時間アルゴリズム

先行研究

- 予算ゲーム
- 混雑ゲーム

予算ゲーム: 純粋ナッシュ均衡

定理 [Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2019]

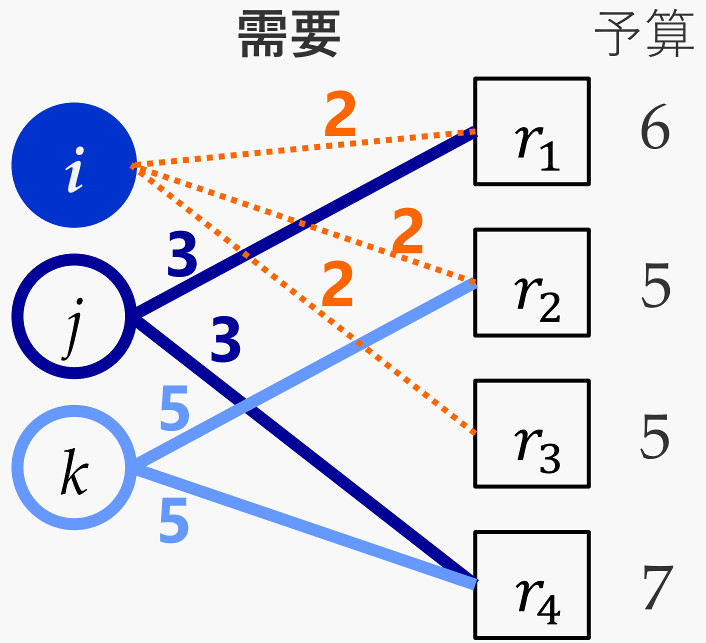
- **(1)** かつ **(2)** をみたす予算ゲームは, 純粋ナッシュ均衡をもつ
- **(1)** をみたす予算ゲームで, 純粋ナッシュ均衡をもたないものがある

性質 (1): 固定需要

各プレイヤー i について,
ある $d(i) \in \mathbf{R}$ が存在して,
すべての資源 $r \in R$ について $d_r(i) = d(i)$

性質 (2): マトロイドゲーム

各プレイヤー i の戦略空間 $\mathcal{S}_i$ が
マトロイドの基族



予算ゲーム：モデルの一般化

オフセット予算ゲーム

- 資源 $r \in R$ の**オフセット** $\alpha_r \in \mathbf{R}$

$$u_{i,r}(\boldsymbol{S}) = \min\left\{d_r(i), d_r(i) \cdot \frac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S}) + \boldsymbol{\alpha_r}}\right\}$$

予算ゲーム

$$u_{i,r}(\boldsymbol{S}) = \min\left\{d_r(i), d_r(i) \cdot \frac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S})}\right\}$$

定理 [Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2019]

以下のいずれかの**オフセット予算ゲーム**は**純粋ナッシュ均衡をもつ**

- **マトロイドゲーム**で，**全資源数** $|R| = 2$
- 以下の 1.—3.をみたす
  1. **戦略の資源数** $|S_i| = 1$ $\quad (i \in N, S_i \in \mathcal{S}_i)$
  2. $d_r(i) \geq d_r(j)$ $\quad (1 \leq i < j \leq n,\ r \in R)$
  3. $i < j, d_r(i) \geq d_{r'}(i) \Longrightarrow \dfrac{d_r(i)}{d_{r'}(i)} \geq \dfrac{d_r(j)}{d_{r'}(j)}$ $\quad (r, r' \in R)$

混雑ゲーム: 例

[Rosenthal 1973]

プレイヤー i の戦略

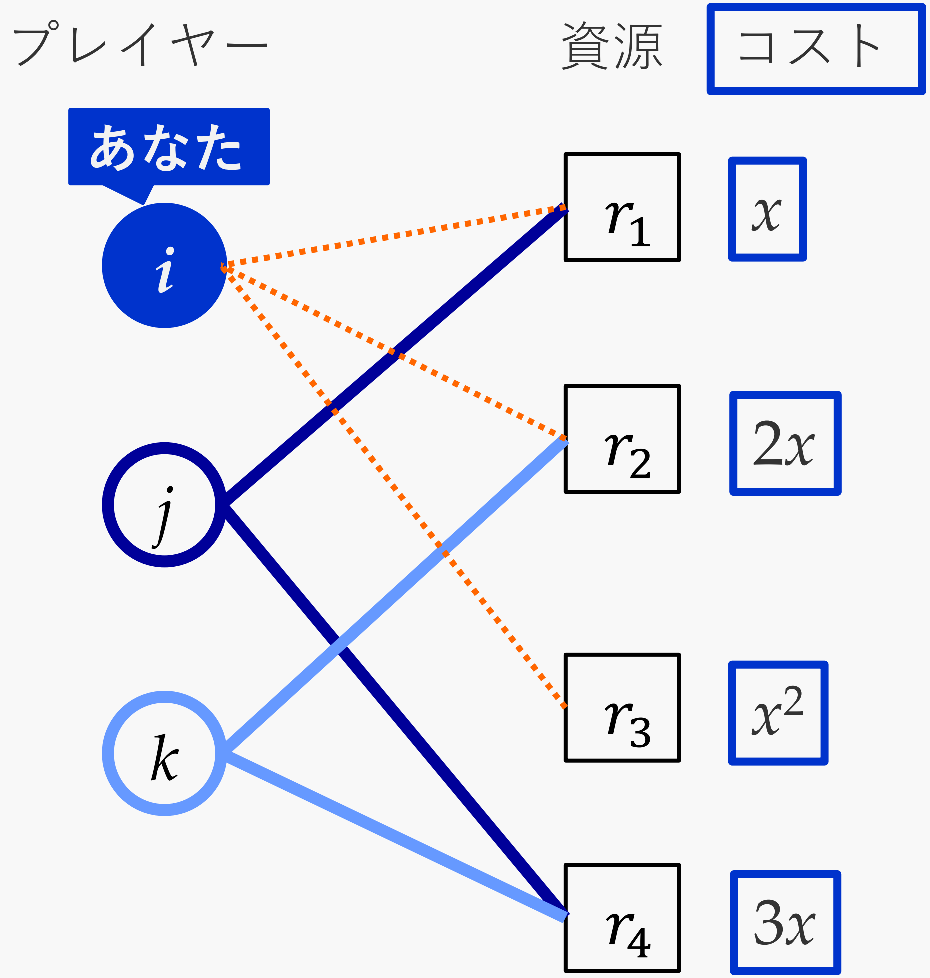
- $S = \{r_1, r_2\}$
- $S' = \{r_1, r_3\}$

プレイヤー i が各資源を使うコスト

- $r_1 : 2$
- $r_2 : 2 \cdot 2 = 4$
- $r_3 : 1^2 = 1$

プレイヤー i の各戦略のコスト

- $S:\ 2 + 4 = 6$
- $S' : 2 + 1 = 3$



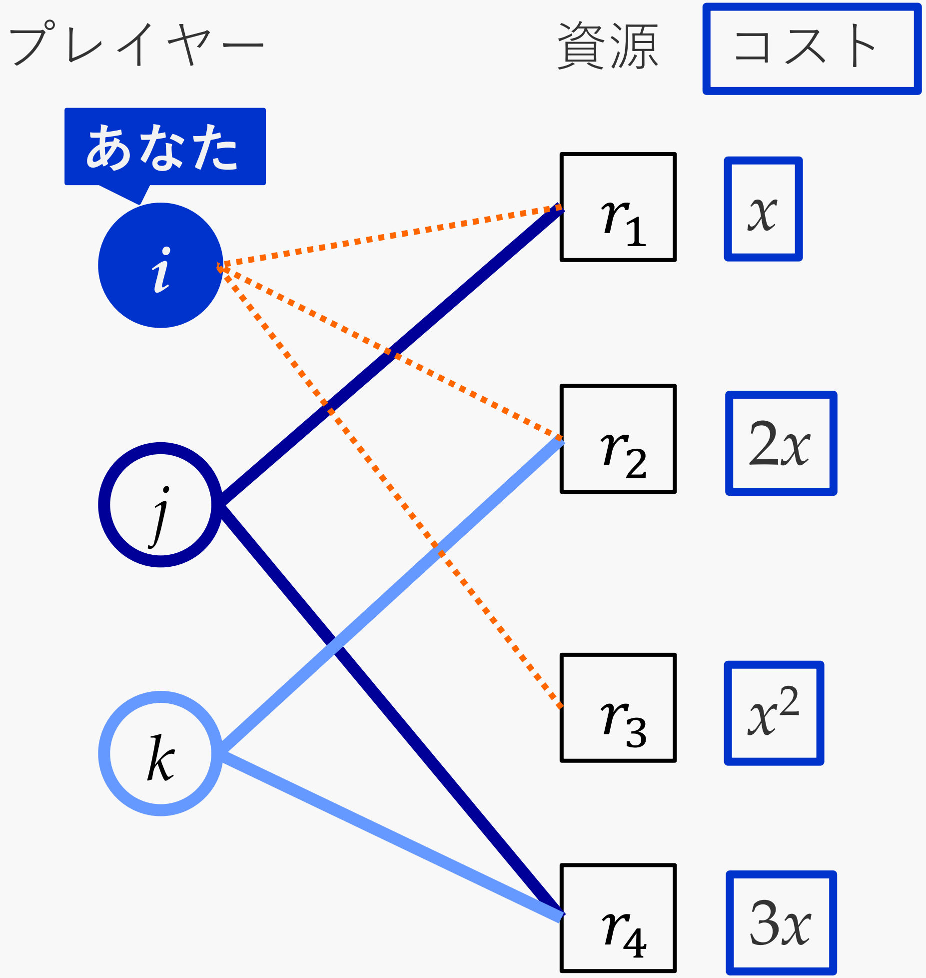
混雑ゲーム: モデル

[Rosenthal 1973]

- **プレイヤー**の集合 $N = \{1,2,\ldots,n\}$
- **資源**の集合 R
- $i \in N$ の**戦略** $S_i \subseteq R$
- $i \in N$ の**戦略空間** $\mathcal{S}_i \subseteq 2^R$
- $r \in R$ の**コスト関数** $c_r : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ **[単調非減少]**

- **状態** $\boldsymbol{S} = \{S_1,\ldots,S_n\}$ において
  - $N_r(\boldsymbol{S}) = \{i \in N \mid r \in S_i\}$
  - プレイヤー i の合計コスト

$$\sum_{r \in S_i} c_r(|N_r(\boldsymbol{S})|)$$



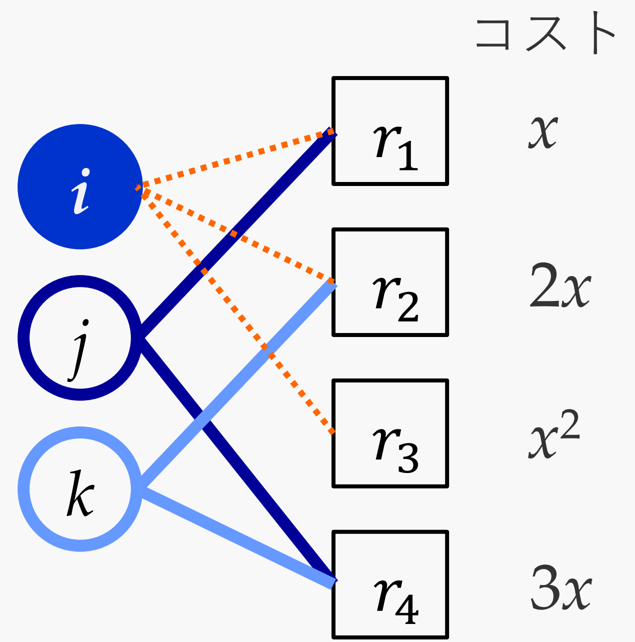
混雑ゲーム: 古典的な結果

定理 [Rosenthal 1973]

- 任意の**混雑ゲーム**は**ポテンシャルゲーム**
  - **純粋ナッシュ均衡が存在**
    (ポテンシャルを最小化する状態 S)

定理 [Monderer, Shapley 1996]

- 任意の**ポテンシャルゲーム**は**混雑ゲーム**



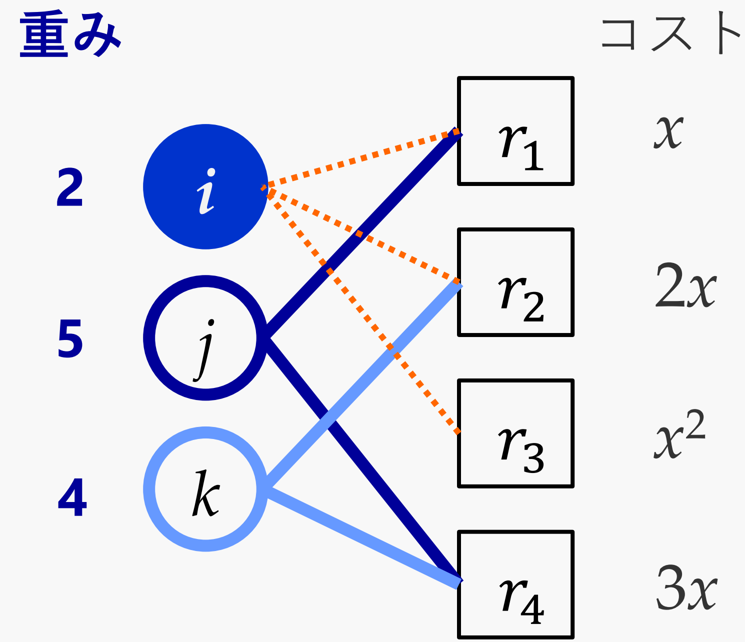
混雑ゲーム: モデルの一般化 (1)

重み付き混雑ゲーム

- プレイヤー i の**重み** $w(i) \in \mathbf{R}$
- 資源 r を使うコスト $= c_r(w(N_r(\boldsymbol{S})))$

混雑ゲーム

- $N_r(\boldsymbol{S}) = \{i \in N \mid r \in S_i\}$
- 資源 r を使うコスト $= c_r(|N_r(S)|)$



定理 [Ackermann, Röglin, Vöking 2009]

- **重み付きマトロイド混雑ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ
- **重み付き混雑ゲーム**で, 純粋ナッシュ均衡をもたないものがある

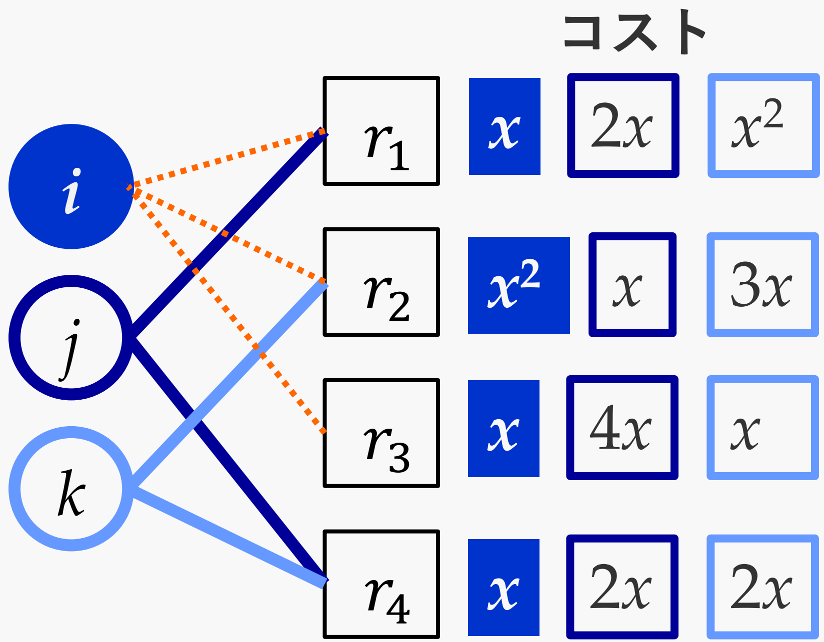
混雑ゲーム: モデルの一般化 (2)

プレイヤー固有コスト

- ▶ **全プレイヤー共通**のコスト関数 $c_r(\cdot)$
- ▶▶ **プレイヤー固有**のコスト関数 $c_{i,r}(\cdot)$ に一般化

定理 [Ackermann, Röglin, Vöking 2009]

- ▶ **プレイヤー固有コストのマトロイド混雑ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ
- ▶ **プレイヤー固有コストの混雑ゲーム**で, 純粋ナッシュ均衡をもたないものがある



本研究

- 一般化予算ゲーム
- 純粋ナッシュ均衡

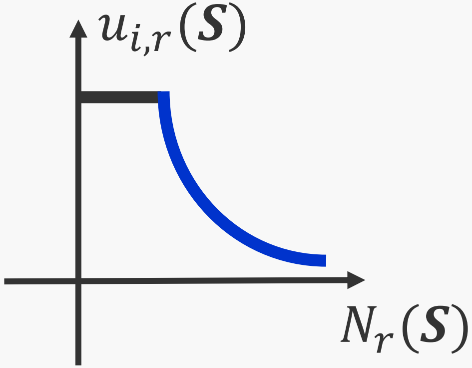
提案モデル: 一般化予算ゲーム

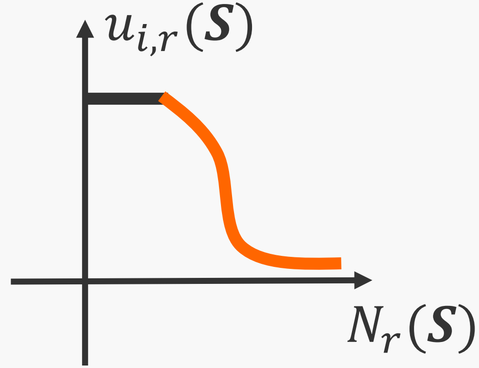
予算ゲーム

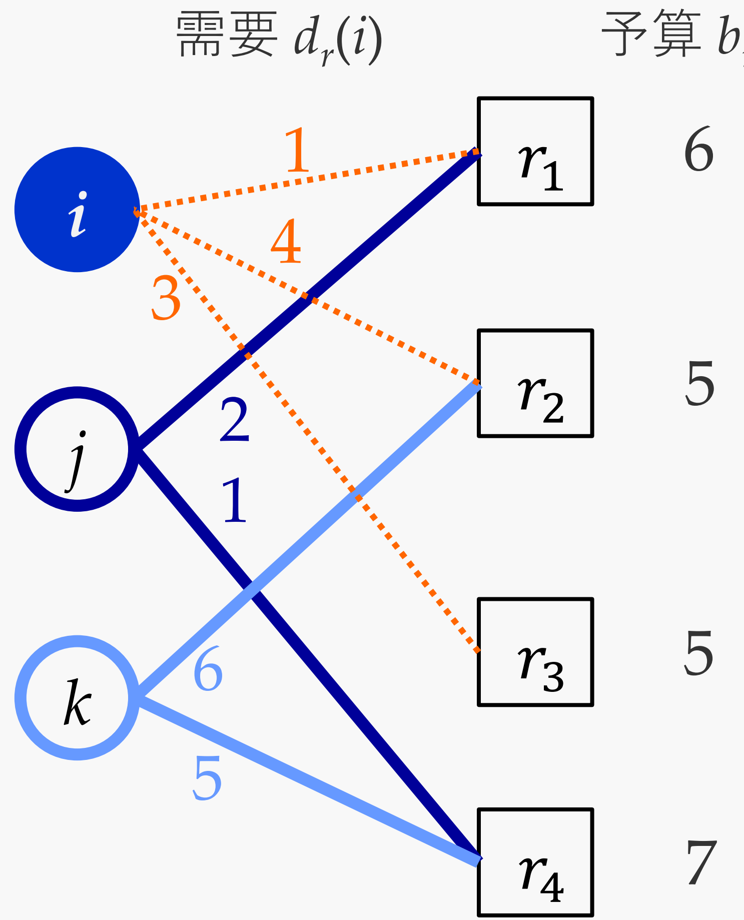
- 効用 $u_{i,r}(\boldsymbol{S}) = \min\left\{d_r(i), d_r(i) \cdot \frac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S})}\right\}$
  $= d_r(i) \cdot \min\left\{1, \frac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S})}\right\}$

一般化予算ゲーム

- **狭義単調減少な集合関数** $f_r: 2^N \to \mathbf{R}$
- 効用 $u_{i,r}(\boldsymbol{S}) = d_r(i) \cdot \min\{1, \ f_r(N_r(\boldsymbol{S}))\}$







含まれるモデル

一般化予算ゲームに含まれるモデル

- 予算ゲーム / オフセット予算ゲーム
- 重み付き混雑ゲーム / プレイヤーが固有のコストをもつ混雑ゲーム

予算ゲーム

$$f_r(N') = \frac{b_r}{d_r(N')}$$

オフセット予算ゲーム

$$f_r(N') = \frac{b_r}{d_r(N') + \alpha_r}$$

重み付き混雑ゲーム

- $f_r(N') = 1 - \frac{c_r\left(w(N')\right)}{L}, d_r(i) \equiv 1$
- $u_i(\boldsymbol{S}) = \sum_{r \in S_i} d_r(i) \cdot \min\{1, f_r(N_r(\boldsymbol{S}))\}$

$$= \sum_{r \in S_i} \left(1 - \frac{c_r(w(N_r(\boldsymbol{S})))}{L}\right)$$

$$= |S_i| - \frac{1}{L} \cdot \sum_{r \in S_i} c_r(w(N_r(\boldsymbol{S})))$$

仮定 $|S_i| = |S_i'| \quad (S_i, S_i' \in \mathcal{S}_i)$

コスト $c_r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が狭義単調減少 $(r \in R)$

一般化予算ゲームの純粋ナッシュ均衡

定理 1 [本研究]

- ▶ **(1)** かつ **(2)** をみたす**一般化予算ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ

定理 [Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2019] **再掲**

- ▶ **(1)** かつ **(2)** をみたす**予算ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ

定理 [Ackermann, Röglin, Vöking 2009] **再掲**

- ▶ **(2)** をみたす**重み付き混雑ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ

性質 (1): 固定需要

各プレイヤー i について,
ある $d(i) \in \mathbf{R}$ が存在して,
すべての資源 $r \in R$ について
需要 $d_r(i) = d(i)$

性質 (2): マトロイドゲーム

各プレイヤー i の戦略空間 $\mathcal{S}_i$ が
マトロイドの基族

オフセット予算ゲームでの新定理

定理 1 [本研究]

▶ **(1)** かつ **(2)** をみたす**一般化予算ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ

系 1a [本研究]

▶ **(1)** かつ **(2)** をみたす**オフセット予算ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ

▶▶資源数 $|R|$ や $|S_i|$ に制約のないオフセット予算ゲームへの初の定理

定理 [Drees, Feldotto, Riechers, Skopalik 2019] **再掲**

以下のいずれかのオフセット予算ゲームは純粋ナッシュ均衡をもつ

- ▶ マトロイドゲームで，**全資源数** $|R| = 2$
- ▶ 以下の 1.–3.をみたす
  1. **戦略の資源数** $|S_i| = 1$ $\quad (i \in N, S_i \in \mathcal{S}_i)$

シングルトン一般化予算ゲーム

定理 2 [本研究]

以下をみたす一般化予算ゲームの

純粋ナッシュ均衡は$\boldsymbol{O(n)}$**時間**で計算可能

- 戦略の資源数 $|S_i| = 1 \quad (i \in N, S_i \in \mathcal{S}_i)$
- 性質 **(1)**: 固定需要
- $f_r(N' \cup \{i\}) \leq f_r(N' \cup \{j\}) \qquad (1 \leq i < j \leq n)$

略証

- プレイヤー 1,…, n の順に, その時点で最適な戦略を選ぶ

純粋ナッシュ均衡の存在性の証明 (1/2)

定理 1 [本研究]

- **(1)** かつ **(2)** をみたす**一般化予算ゲーム**は純粋ナッシュ均衡をもつ

証明 (1/2)

- 状態 $\boldsymbol{S} = (S_1, , \dots, S_n)$, $\boldsymbol{S}_{-i} = (S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n)$
- プレイヤー $i \in N$ の**向上試行** $S_i{}'$: $u_i(S_i', \boldsymbol{S}_{-i}) > u_i(S_i, \boldsymbol{S}_{-i})$
- **(2) マトロイドゲーム**より,
  $|S_i{}' \setminus S_i| = 1$ の向上試行 (Lazy move) を考えれば十分
- 状態 S の**ポテンシャル** $\phi(\boldsymbol{S}) = \left(v_{r_1}(\boldsymbol{S}), v_{r_2}(\boldsymbol{S}), \dots, v_{r_m}(\boldsymbol{S})\right) \in \mathbf{R}^m$
  - $v_r(S) = \dfrac{u_{i,r}(\boldsymbol{S})}{d(i)} = \min\left\{1, \dfrac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S})}\right\}$ を昇順に並べたベクトル

純粋ナッシュ均衡の存在性の証明 (2/2)

証明 (2/2)

- ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{S}) \in \mathbf{R}^m$: $v_r(\boldsymbol{S}) = \frac{u_{i,r}(S)}{d(i)} = \min\left\{1, \frac{b_r}{d_r(\boldsymbol{S})}\right\}$ の昇順
- **主張: Lazy move により, ポテンシャルが辞書式に真に増加する**
  - Lazy move $S_i' = (S_i \setminus \{r\}) \cup \{r'\}$ ▶▶ 状態 $S' = (S_i', \boldsymbol{S}_{-i})$
  - $\phi(\boldsymbol{S}) = (\dots, v_r(\boldsymbol{S}), \dots, v_{r'}(\boldsymbol{S}'), \dots)$
  - $\phi(\boldsymbol{S}') = (\dots, v_r(\boldsymbol{S}'), \dots, v_{r'}(\boldsymbol{S}'), \dots)$
  - 向上試行なので $u_{i,r'}(\boldsymbol{S}') > u_{i,r}(\boldsymbol{S})$
    - **(1) 固定需要** より $v_{r'}(\boldsymbol{S}') > v_r(\boldsymbol{S})$
    - 特に， $v_r(\boldsymbol{S}) < 1$
  - $d_r(S') = d_r(S) - d(i)$ と $v_r(\boldsymbol{S}) < 1$ より， $v_r(\boldsymbol{S}') > v_r(\boldsymbol{S})$
- **主張**より， 有限回の Lazy move の後に, ポテンシャルが辞書式に最大 ▶▶ Lazy Move が存在しない ▶▶ 純粋ナッシュ均衡である ■

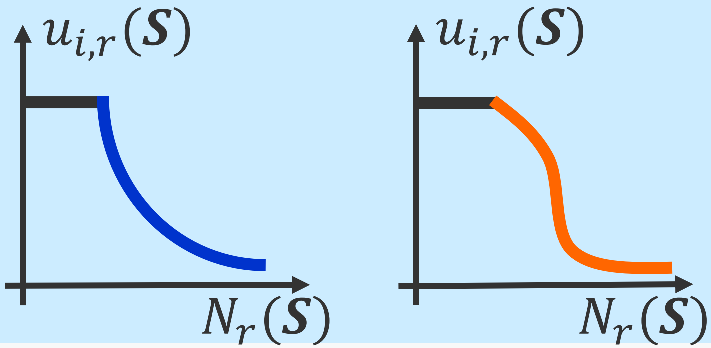
おわりに

- まとめ
- 今後の課題

まとめと今後の課題

まとめ

- **一般化予算ゲームの提案**
- 狭義単調減少な集合関数 $f_r\colon 2^N \to \mathbf{R}$
- 効用 $u_{i,r}(\boldsymbol{S}) = d_r(i) \cdot \min\{1,\ f_r(N_r(\boldsymbol{S}))\}$
- **純粋ナッシュ均衡の存在性**
  - マトロイド予算ゲーム
  - 重み付きマトロイド混雑ゲーム
- **特殊ケースに対する O(n) アルゴリズム**



今後の課題

- **純粋ナッシュ均衡への到達速度**
  - 重み付き混雑ゲームでの向上試行回数の下界 [Ackermann et al. 2009]
- **ボトルネック混雑ゲームとの関係** [Banner, Orda 07] [Harks, Klimm, Möhring 09] [Harks, Hoefer, Klimm, Skopalik 13]