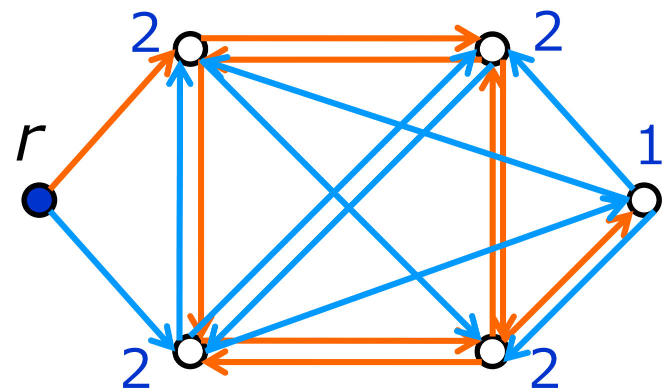
有向グラフにおける *b*-有向木

垣村 尚徳　慶應義塾大学

神山 直之　九州大学 / JSTさきがけ

高澤 兼二郎　法政大学



日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018年 春季研究発表会

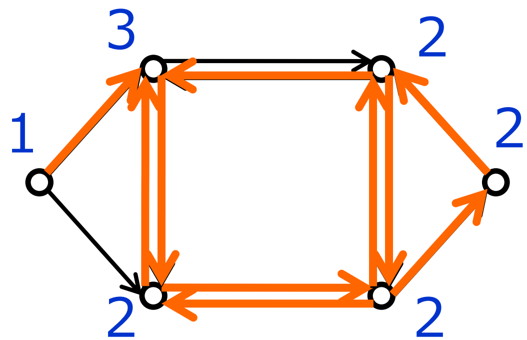
東海大学

2018年3月15日

本研究の概要 Summary

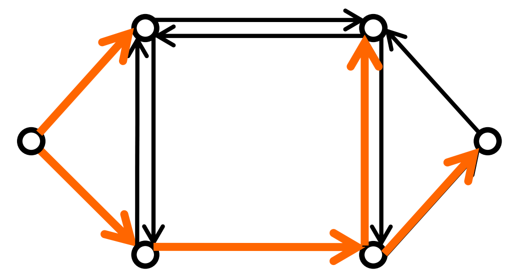
b-有向木 の提案 [本研究]

- **アルゴリズム**
- **詰め込み定理**



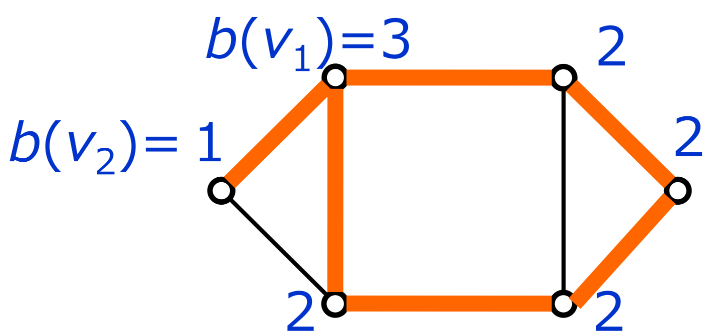
有向木

- アルゴリズム [Chu & Liu 65, etc.]
- 詰め込み定理 [Edmonds 73]



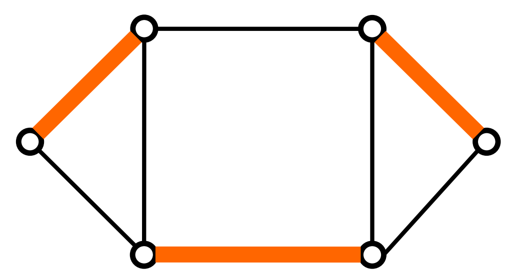
b-マッチング

- 最大最小定理 [Tutte 54]
- アルゴリズム [Marsh 79]



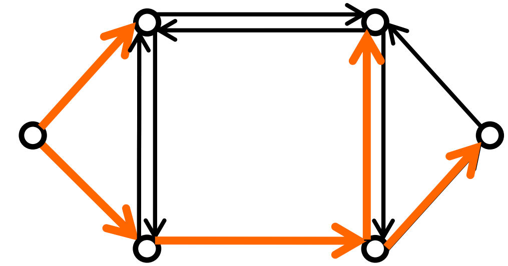
マッチング

- 最大最小定理 [Tutte 47, Berge 58]
- アルゴリズム [Edmonds 65]

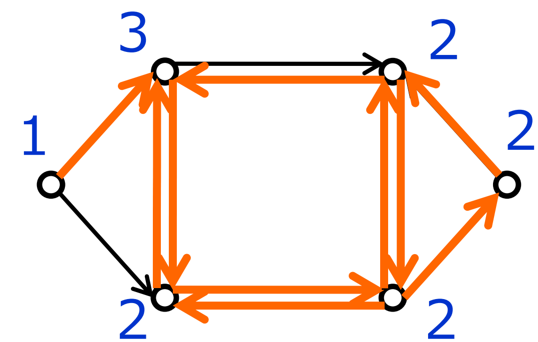


目次 Outline

- 導入: 有向木
  - 分割マトロイド + グラフ的マトロイド
    - アルゴリズム
    - 詰め込み定理, 整数分解性



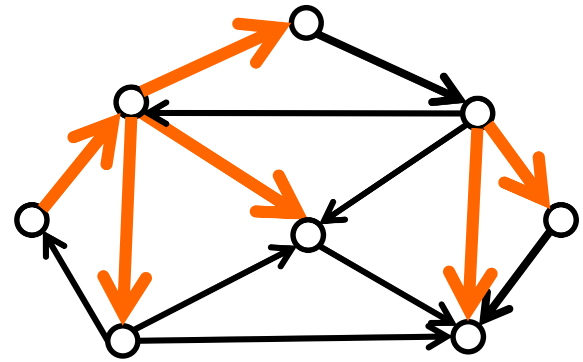
- **本研究: *b*-有向木 の 提案**
  - 分割マトロイド + 疎性マトロイド
    - **アルゴリズム**
    - **詰め込み定理, 整数分解性**



- まとめ

有向木 Branching / Arborescence

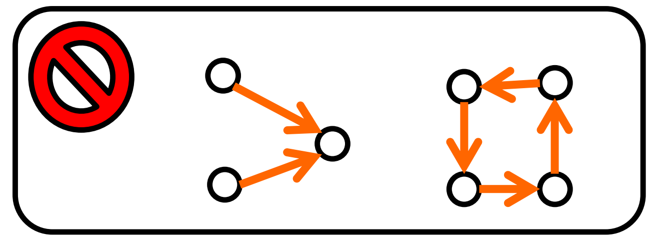
◆ 有向グラフ (V, A)



定義

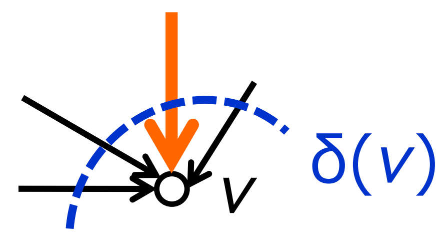
● $B \subseteq A$ が**有向木** ⇔

$\begin{cases} \text{(i) indeg}(v) \leq 1 \quad (v \in V) \\ \text{(ii) 閉路を含まない} \end{cases}$



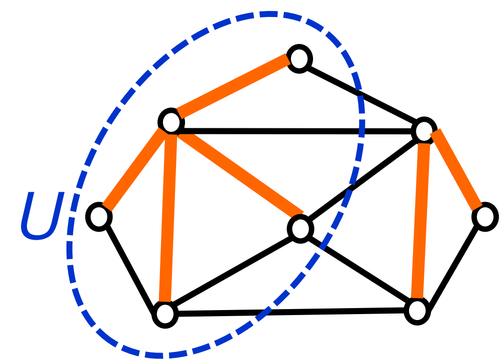
事実

有向木は**マトロイド交わり** (☞次ページ)



➢ 条件 (i): **分割マトロイド**
- ✓ A の分割 $\{\delta(v_1), \delta(v_2), \ldots, \delta(v_n)\}$
- ✓ $|B \cap \delta(v_i)| \leq 1 \ (i=1,2,\ldots,n)$

➢ 条件 (ii): **グラフ的マトロイド**
- ✓ $|B[U]| \leq |U| - 1 \ (\emptyset \neq U \subseteq V)$



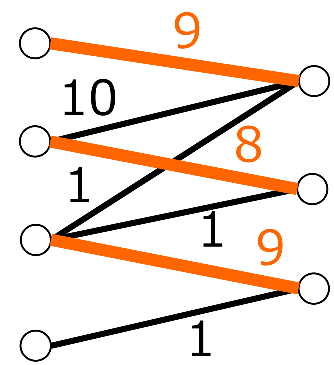
マトロイド交わり Matroid Intersection

◆ マトロイド $\mathbf{M}_1=(A, \mathcal{I}_1)$, $\mathbf{M}_2=(A, \mathcal{I}_2)$
◆ 重み $w\in\mathbf{R}^A$

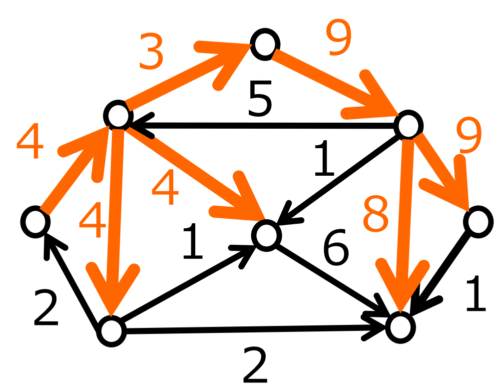
マトロイド交わり問題

- 重み最大の $B \in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ を求めよ [重み $w(B)=\sum_{a\in B} w(a)$]

➢ 多項式時間可解
 ✓ **増加道アルゴリズム** [Edmonds 70] など



- 例１： **２部グラフのマッチング**
  - ✓ $\mathbf{M}_1$: 分割マトロイド
  - ✓ $\mathbf{M}_2$: 分割マトロイド



- 例２： **有向グラフの有向木**
  - ✓ $\mathbf{M}_1$: 分割マトロイド
  - ✓ $\mathbf{M}_2$: グラフ的マトロイド

有向木 の 良い性質 Special Matroid Intersection

◆以下の性質 (A) (B) は, 一般のマトロイド交わりでは成り立たない

有向木 の 良い性質 (A)

最大重み有向木の **多段階貪欲アルゴリズム** (☞次ページ)

- **２部グラフのマッチング** ですら 成り立たない **(!)**

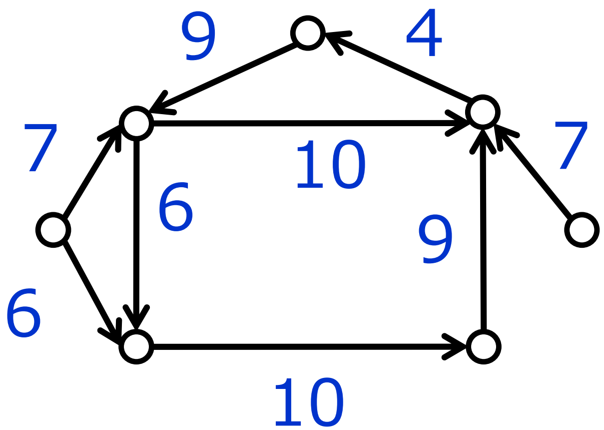
有向木 の 良い性質 (B)

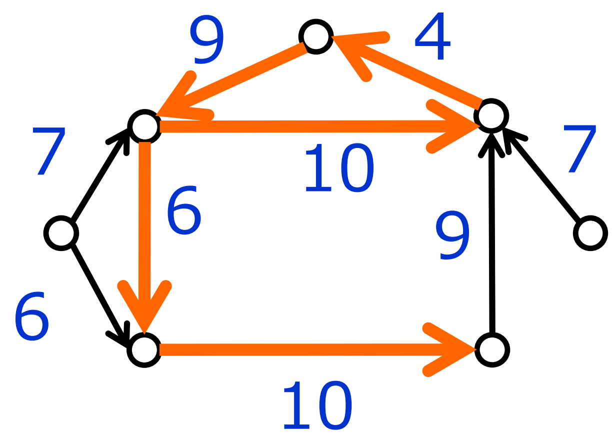
詰め込み定理 ＋ 多面体の**整数分解性** (☞次々ページ)

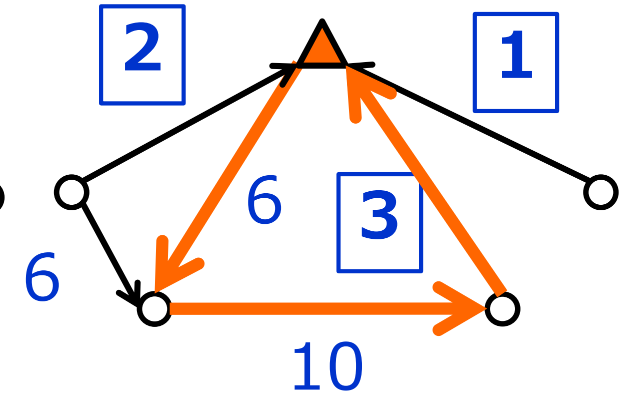
- **２部グラフのマッチング** では 成り立つ (２部グラフの辺彩色)
- Strongly base orderable matroid intersection [Davies, McDiarmid 76]
- Other examples⋯?

有向木の多段階貪欲アルゴリズム Greedy Algorithm

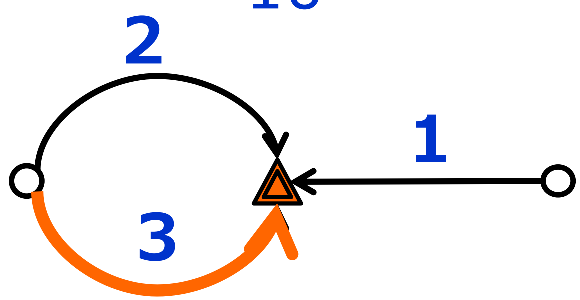
[Chu-Liu 65, Edmonds 67, Bock 71, Fulkerson 74]

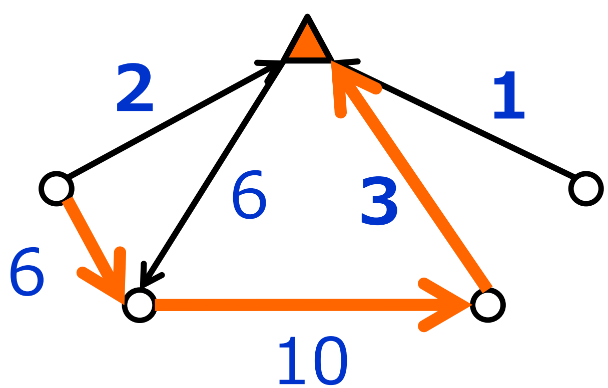


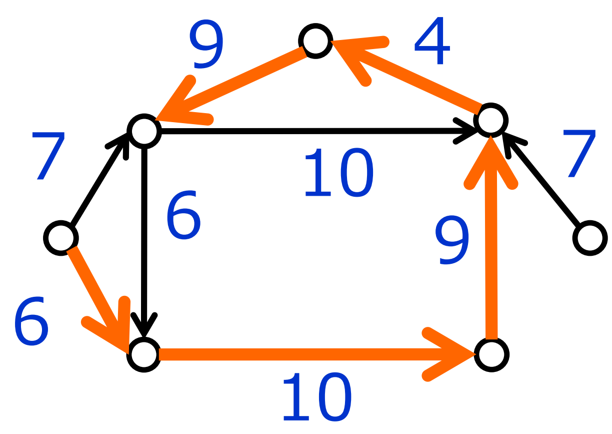




$\mathbf{2} = 7 + 4 - 9$
$\mathbf{3} = 9 + 4 - 10$
$\mathbf{1} = 7 + 4 - 10$





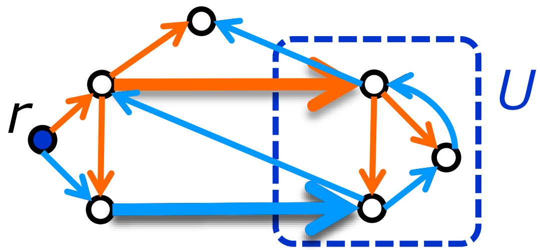


詰め込み定理 と 整数分解性 Packing and IDP

定理 [Edmonds 67, Bock 71, Fulkerson 74]

r-根付き有向木が存在

$\Leftrightarrow |\delta(U)| \geq 1 \ \ (\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\})$



定理 [Edmonds 73]

***k* 個の辺素な** r-根付き有向木が存在

$\Leftrightarrow |\delta(U)| \geq k \ \ (\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\})$

定理 [Baum, Trotter 81]

有向木多面体は **整数分解性**

(Integer Decomposition Property) をもつ

有向木多面体 *P*

$x(\delta(v)) \leq 1 \quad (v \in V)$

$x(A[U]) \leq |U| - 1 \ (\emptyset \neq U \subseteq V)$

$x(a) \geq 0 \quad (a \in A)$

多面体 *kP*

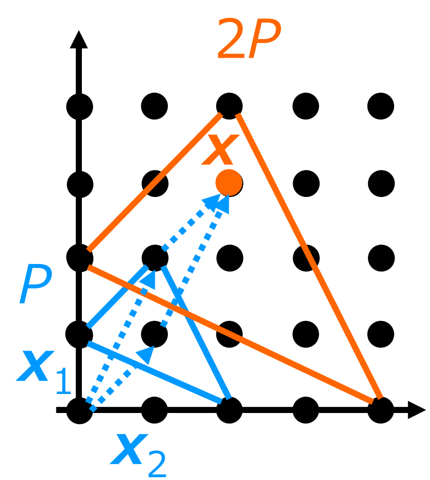
$x(\delta(v)) \leq k$

$x(A[U]) \leq k(|U| - 1)$

$x(a) \geq 0$

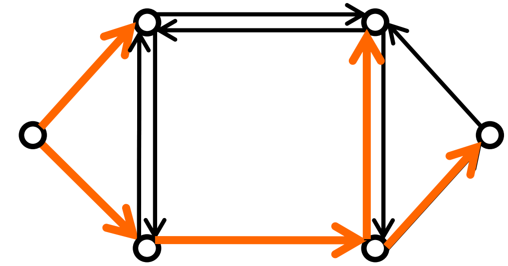
多面体 *P* の 整数分解性:

$^{\forall}k \in \mathbf{Z}_{++}, \ ^{\forall}\mathbf{x} \in kP \cap \mathbf{Z}^A, \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k \ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in P \cap \mathbf{Z}^A)$

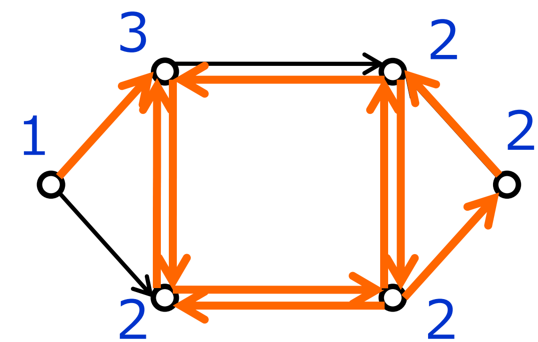


目次 Outline

- <u>導入: 有向木</u>
  - ■ 分割マトロイド + グラフ的マトロイド
  - ➢ アルゴリズム
  - ➢ 詰め込み定理, 多面体の整数分解性



- <u>**本研究: *b*-有向木 の 提案**</u>
  - ■ 分割マトロイド + 疎性マトロイド
  - ➢ **アルゴリズム**
  - ➢ **詰め込み定理,** 多面体の**整数分解性**



- <u>まとめ</u>

有向グラフにおける b-有向木 b-branching

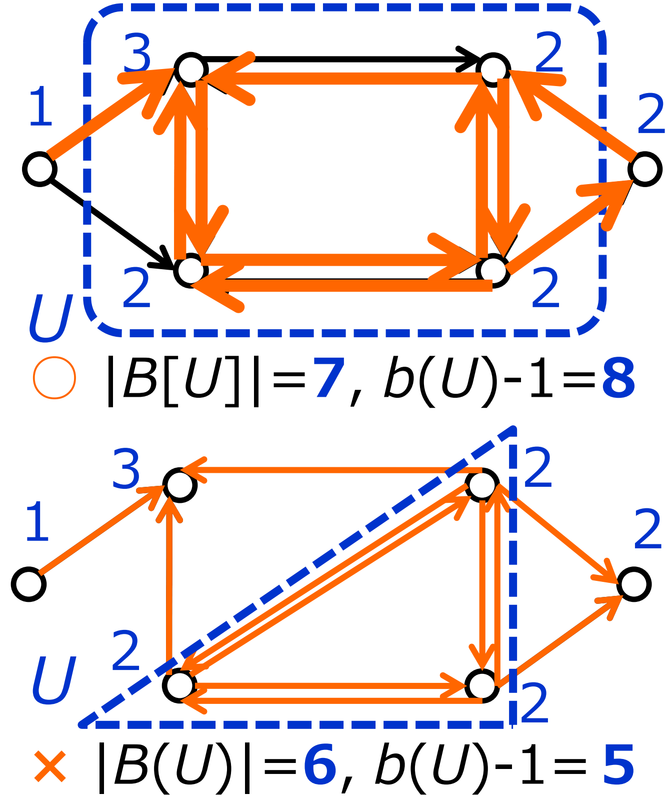
◆ 有向グラフ (V, A)
◆ 点集合 V 上の正整数ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbf{Z}^V$

定義

● $B\subseteq A$ が ***b*-有向木** $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{(i) } \mathrm{indeg}(v) \le b(v) & (v\in V) \\ \text{(ii) } |B[U]| \le b(U) - 1 & (\emptyset\neq U\subseteq V) \end{cases}$$

✓ 有向木: $b(v)=1$



➢ 条件 (i): 一様マトロイド の 直和
➢ 条件 (ii): **疎性マトロイド** (Sparsity matroid / Count matroid)

疎性マトロイド [cf. Frank 11]

無向グラフ $G=(V,E)$, 正ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbf{Z}^V$, 非負整数 k

➢ $\{B\subseteq E : |B[U]| \le b(U) - k\}$ はマトロイドの独立集合族

✓ k 個の有向木の和: $\mathrm{indeg}(v) \le k \quad (v\in V)$

$|B[U]| \le k|U| - k \quad (\emptyset\neq U\subseteq V)$

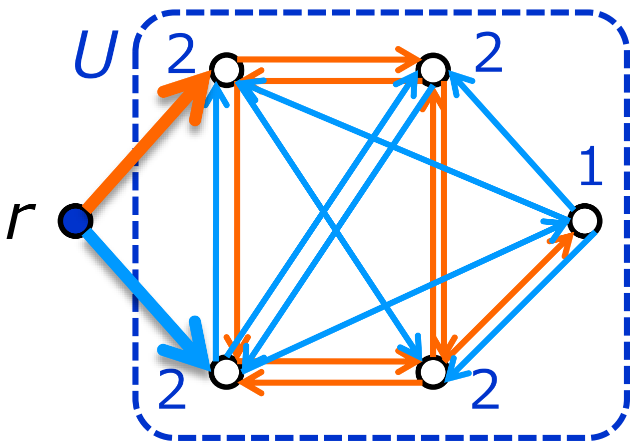
b-有向木の性質 Our Results

b-有向木の性質 (A) [本研究]

最大重み ***b***-有向木の **多段階貪欲アルゴリズム**

b-有向木の性質 (B) [本研究]

詰め込み定理 + 多面体の**整数分解性**



b-有向木 多面体

$x(\delta(v)) \leq b(v) \quad (v \in V)$

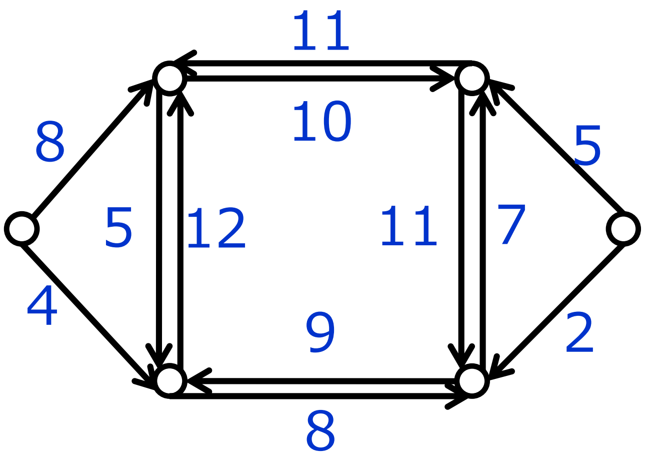
$x(A[U]) \leq b(U) - 1 \quad (\emptyset \neq U \subseteq V)$

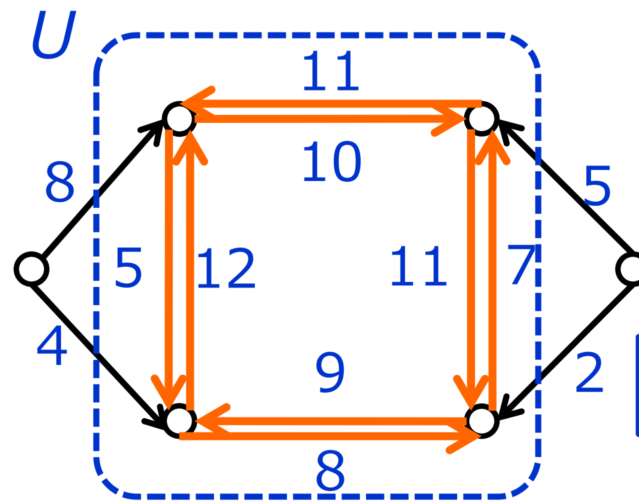
$x(a) \geq 0 \quad (a \in A)$

- $|\delta(v)| \geq k \cdot b(v) \quad (v \in V \setminus \{r\})$
- $|\delta(U)| \geq k \quad (\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\})$

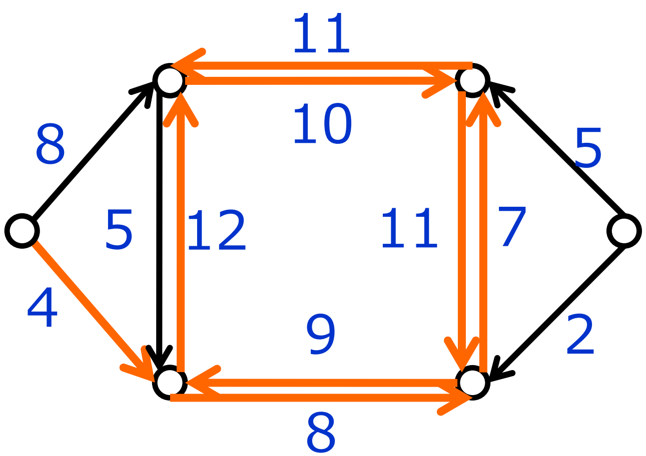
b-有向木の多段階貪欲アルゴリズム Demonstration

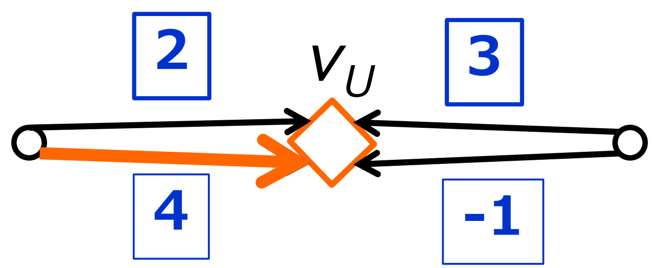
$b(v)=2\ ({}^{\forall}v\in V)$





$|B[U]|=b(U)$





$b(v_U) := 1$

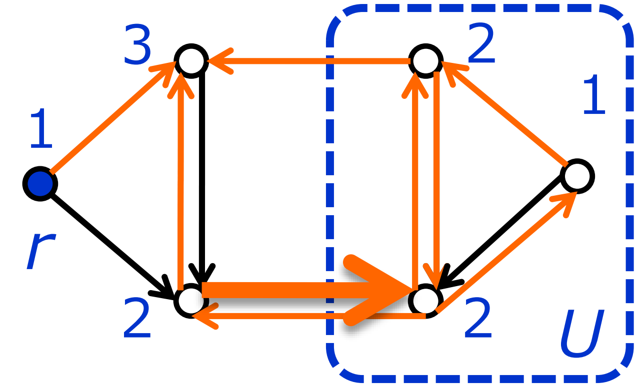
2 = 8 + 5 − 11
4 = 4 + 5 − 5
3 = 5 + 5 − 7
-1 = 2 + 5 − 8

b-有向木の詰め込み定理 Packing b-arboresecences

定理 [本研究]

indeg(v)=$b(v)$ (v∈V∖{r}) の ***b***-有向木が存在 ⇔

- $|\delta(v)| \geq b(v)$ ($v \in V \setminus \{r\}$)
- $|\delta(U)| \geq 1$ ($\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$)



定理 [本研究]

k* 個の辺素な** indeg(v)=$b(v)$ (v∈V∖{r}) の ***b-有向木が存在 ⇔

- $|\delta(v)| \geq k \cdot b(v)$ ($v \in V \setminus \{r\}$)
- $|\delta(U)| \geq k$ ($\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$)

定理 [Edmonds 67, Bock 71, Fulkerson 74]

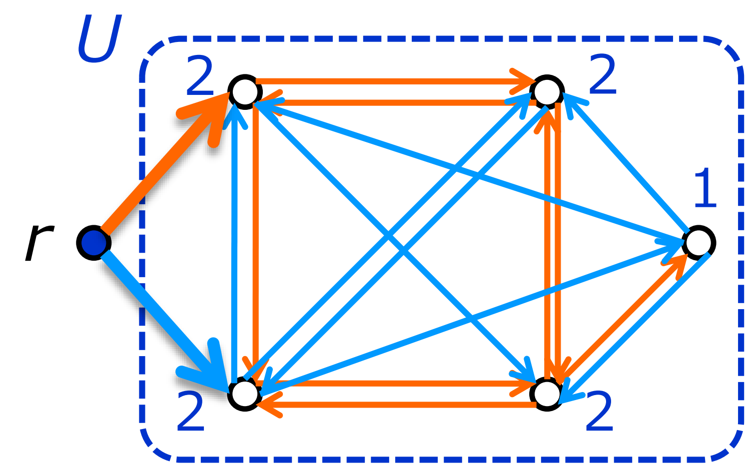
r-根付き有向木が存在

⇔ $|\delta(U)| \geq 1$ ($\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$)

定理 [Edmonds 73]

***k* 個の辺素な** r-根付き有向木が存在

⇔ $|\delta(U)| \geq k$ ($\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\}$)



b-有向木詰め込み の アルゴリズム Done by SFM

定理 [本研究][再掲]

k 個の辺素な indeg(v)=b(v) ($v \in V \setminus \{r\}$) の b-有向木が存在 ⇔
- $|\delta(v)| \geq k \cdot b(v) \quad (v \in V \setminus \{r\})$
- $|\delta(U)| \geq k \quad (\emptyset \neq U \subseteq V \setminus \{r\})$

定理 [本研究]

b-有向木の詰め込みは**強多項式時間**で可能:

① 存在判定
② 詰め込みを求める
③ 最小重みの詰め込みを求める

① **最小カット**アルゴリズム 1 回
② **最小カット**アルゴリズム 高々 $k \cdot b(V) \cdot |A|$ 回 ($\leq |A|^2$ 回)
③ **劣モジュラ流**アルゴリズム 1 回

多面体の整数分解性 Integer Decomposition Property

定理 [本研究][再掲]

k 個の辺素な indeg(v)=$b(v)$ ($v\in V\setminus\{r\}$) の $\boldsymbol{b}$-有向木が存在 ⇔

- $|\delta(v)| \geq k\cdot b(v)$　($v \in V\setminus\{r\}$)
- $|\delta(U)| \geq k$　($\emptyset \neq U \subseteq V\setminus\{r\}$)

定理 [本研究]

以下で定まる $\boldsymbol{b}$-有向木多面体は**整数分解性**をもつ:

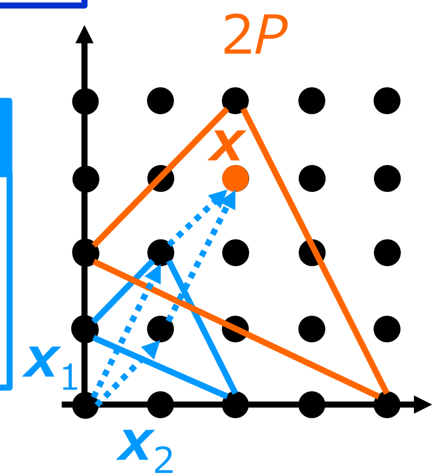
- $x(\delta v) \leq b(v)$　($v\in V$)
- $x(A[U]) \leq b(U) - 1$　($\emptyset\neq U\subseteq V$)
- $0 \leq x(a) \leq 1$　($a\in A$)

定理 [Edmonds 73]

k個の辺素な r-根付き有向木が存在
⇔ $|\delta(U)| \geq k$　($\emptyset\neq U\subseteq V\setminus\{r\}$)

有向木多面体

- $x(\delta(v)) \leq 1$
- $x(A[U]) \leq |U| - 1$
- $x(a) \geq 0$



より広い問題設定 Further (Natural) Generalizations

- **入次数が異なる *b*-有向木の詰め込み**

  ベクトル $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_k \in \mathbf{Z}^V$ (ただし $\boldsymbol{b}_i \le \boldsymbol{b}$)

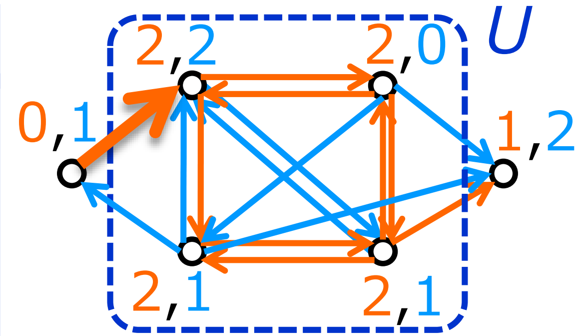
定理 [本研究]

$\mathrm{indeg}_{B_i}(v)=b_i(v)$ ($v\in V$, $i=1,2,\ldots,k$) をみたす
辺素な ***b***-有向木 $B_1,B_2,\ldots,B_k$ が存在 ⇔

- $|\delta(v)| \ge \sum_{i=1}^{k} b_i(v)$ ($v\in V$)
- $|\delta(U)| \ge |\{i\in[k] : b_i(U)=b(U)\neq 0\}|$ ($\emptyset\neq U\subseteq V$)

$b(v)\equiv 2$

$b_1(v),b_2(v)$



➔ $|\delta(U)| \ge 1$

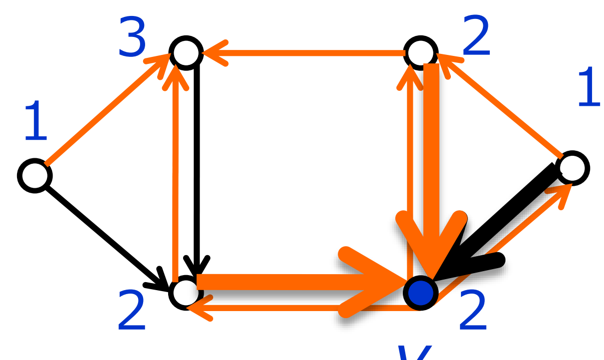
- **マトロイド制約付き *b*-有向木**

  各頂点 $v\in V$ に, ランク $b(v)$ のマトロイド $\mathbf{M}_v=(\delta(v), \mathcal{I}_v)$ が付随

定義

- $B\subseteq A$ が **マトロイド制約付き *b*-有向木** ⇔

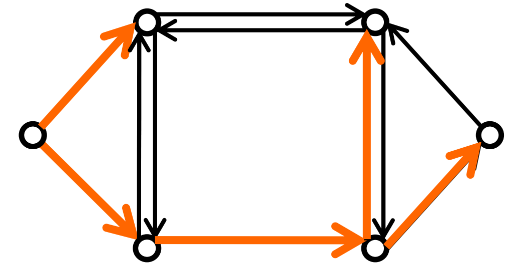
$$\begin{cases} \text{(i) } \boldsymbol{B\cap\delta(v)} \in \mathcal{I}_v & (v\in V) \\ \text{(ii) } |B[U]| \le b(U) - 1 & (\emptyset\neq U\subseteq V) \end{cases}$$



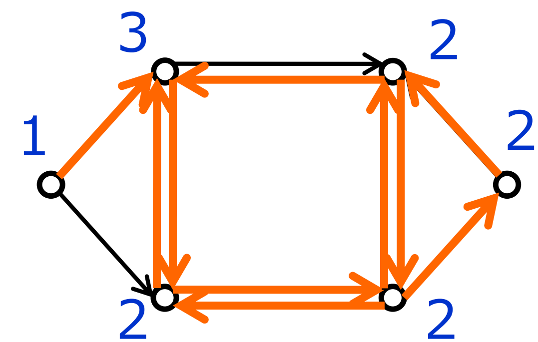
- 多段階貪欲アルゴリズムを拡張可能

目次 Outline

- 導入: 有向木
  - 分割マトロイド + グラフ的マトロイド
  - ➢ アルゴリズム
  - ➢ 詰め込み定理, 多面体の整数分解性



- **本研究: *b*-有向木 の 提案**
  - 分割マトロイド + 疎性マトロイド
  - ➢ **アルゴリズム**
  - ➢ **詰め込み定理,** 多面体の**整数分解性**

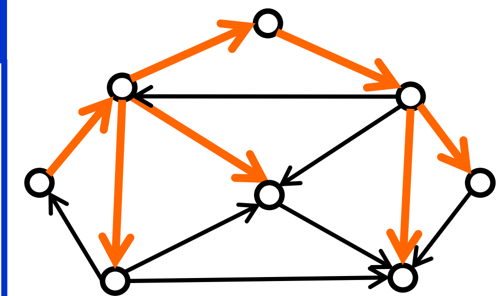


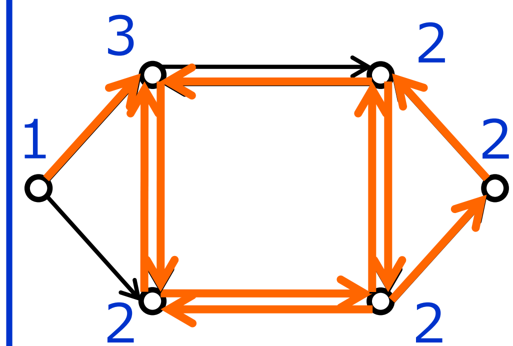
- まとめ

まとめ と 今後の課題 Last Slide

まとめ

- 有向グラフにおける ***b*-有向木** の提案
  - ➢ **各頂点の次数 ≤ *b*(*v*)**
    - ✓ マッチング ➔ ***b***-マッチング
    - ✓ 有向木 ➔ ***b***-有向木
  - ➢ もう一つのマトロイド制約＝**疎性マトロイド**
  - ➢ 有向木の良い性質 を 継承:
    - ✓ **多段階貪欲アルゴリズム**
    - ✓ **詰め込み定理, 多面体の整数分解性**





今後の課題

- 多段階貪欲アルゴリズムで解ける
  マトロイド交わりの他のクラス？？
- 有向木についての既存研究の ***b***-有向木版？？

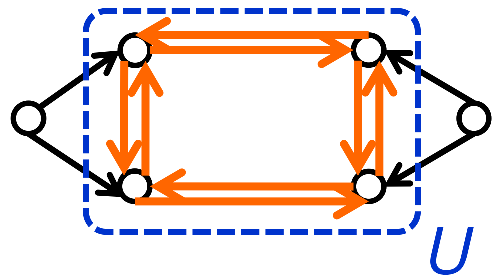
END of Slides

多段階貪欲アルゴリズムに必要な性質 Key Lemma

補題

マトロイド $\mathbf{M}_1$ の独立集合 B について, $B \notin \mathcal{I}_2$ ならば
- ➢ (V, B) に強連結成分 U が存在して $|B[U]| = b(U)$
- ➢ $B[U]$ は $\mathbf{M}_2$ における**サーキット**

➔ 強連結成分 U を 1 頂点 v_U に縮約
➔ $b(v_U) := 1$, 枝重み w を適切に設定
➔ 再帰



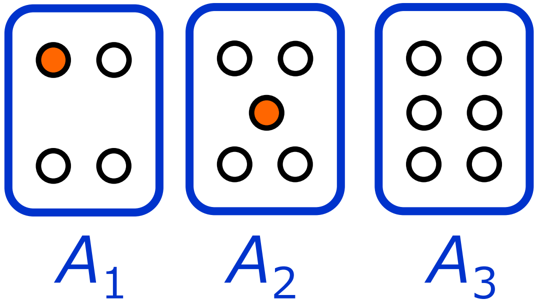
多段階貪欲アルゴリズムに必要な性質

マトロイド $\mathbf{M}_1$ の独立集合 B について, $B \notin \mathcal{I}_2$ ならば
- ➢ B の分割 $\{I, C_1,\ldots,C_k\}$ が存在して
  I は $\mathbf{M}_2$ の独立集合, $C_1,\ldots,C_k$ は $\mathbf{M}_2$ の**サーキット**

マトロイド Matroid

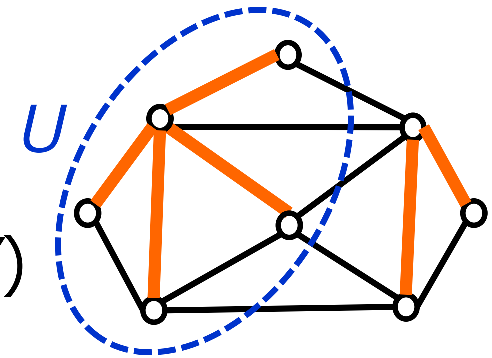
◆有限集合 A, 部分集合 の族 $\mathcal{I} \subseteq 2^A$

- 例 1 : **分割マトロイド**
  - A の分割 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$
  - $B \in \mathcal{I} \Leftrightarrow |B \cap A_i| \leq 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$



- 例 2 : **グラフ的マトロイド**
  - 無向グラフ (V, A)
  - $B \in \mathcal{I} \Leftrightarrow B$ は閉路を含まない

$\Leftrightarrow |B[U]| \leq |U| - 1$ $(\emptyset \neq U \subseteq V)$



マトロイドの公理 ($\mathcal{I}$: 独立集合族)

- $\emptyset \in \mathcal{I}$
- $B_1 \in \mathcal{I}$, $B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow B_2 \in \mathcal{I}$
- $B_1, B_2 \in \mathcal{I}$, $|B_1| > |B_2| \Rightarrow {}^{\exists} a \in B_1 \setminus B_2$, $B_2 + a \in \mathcal{I}$