制約付き t-マッチング の 統一的な枠組

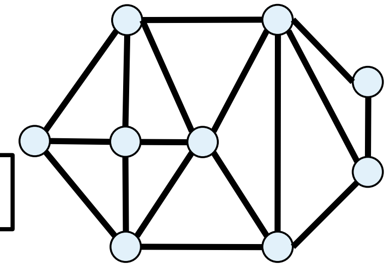
髙澤 兼二郎 法政大学

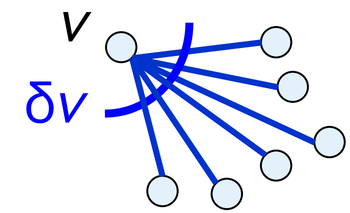
日本オペレーションズ・リサーチ学会
2017年春季研究発表会
沖縄県市町村自治会館
2017 年 3 月 16 日

マッチング と 2-マッチング

- **無向グラフ $G = (V,E)$**

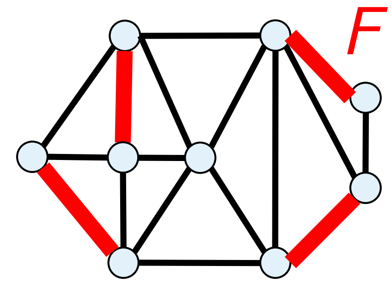
並行辺・自己閉路 なし

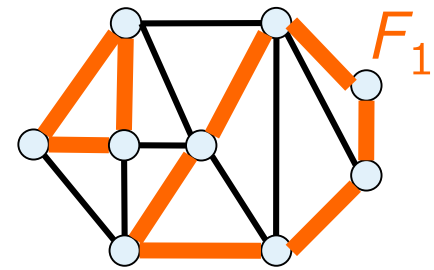




定義

- $F \subseteq E$ が **マッチング**
  $\Leftrightarrow |F \cap \delta v| \leq 1 \quad {}^{\forall} v \in V$

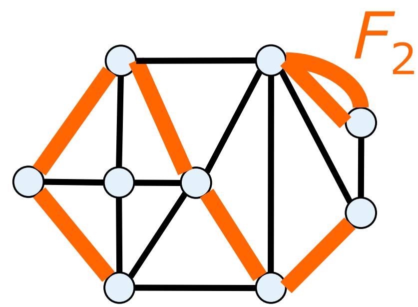


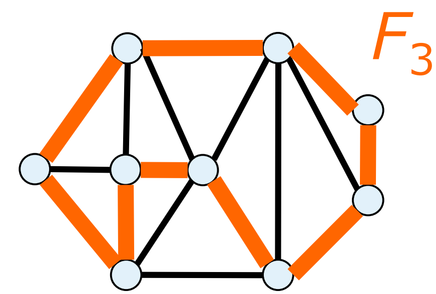


定義

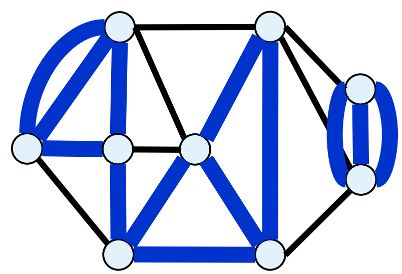
- $\boldsymbol{x}$: $E \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$ が **2-マッチング**
  $\Leftrightarrow \sum_{e \in \delta v} \boldsymbol{x(e)} \leq \mathbf{2} \quad {}^{\forall} v \in V$

- 特に, $\boldsymbol{x}$: $E \rightarrow \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ ならば
  単純 2-マッチング





$t = 3$

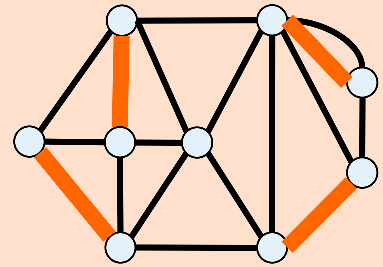


- ➢ **2➔*t*** としたものが ***t*-マッチング**
- ➢ 本発表では主に **t=1,2**

本研究の位置づけ: 本枠組に含まれる問題

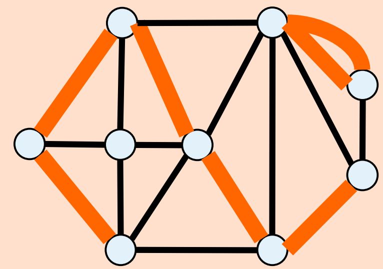
本枠組

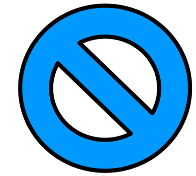
- **マッチング**

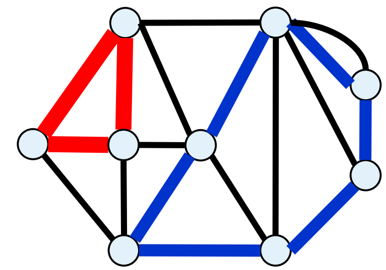


制約追加

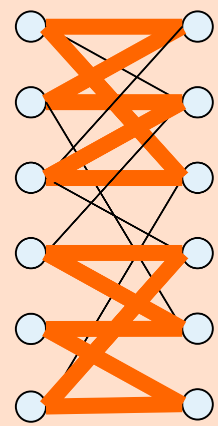
- **Triangle-free 2-マッチング**

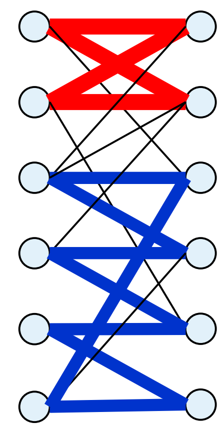






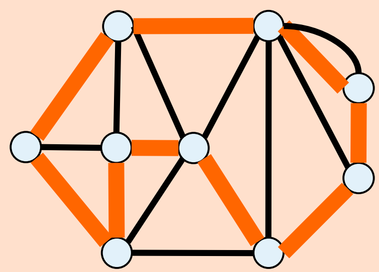
- 2部グラフにおける
  単純 Square-free 2-マッチング





(and more…)

- **ハミルトン閉路**



本研究で解いた部分

本枠組

- マッチング

- Triangle-free 2-マッチング
- ２部グラフにおける
  単純 Square-free 2-マッチング

- ハミルトン閉路

本研究

- **最大最小定理**
- **整数性**をもつ**線形計画表現**
- **組合せ的アルゴリズム**

↑ **多項式時間可解**

↓ **NP 完全**

目次

最大マッチング問題

最大マッチング問題

- **|*F*|** が最大の**マッチング**を求めよ

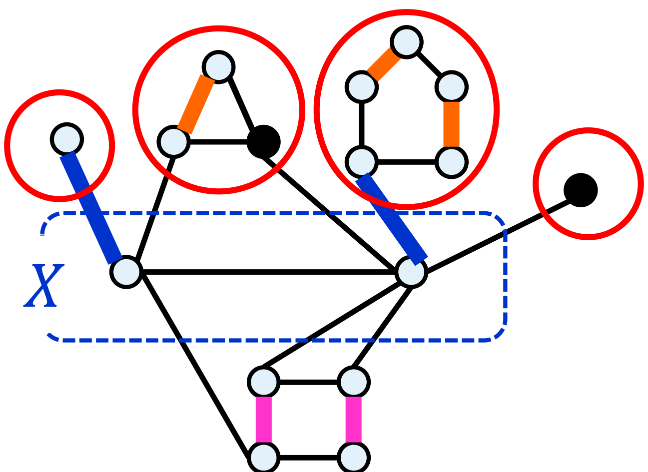
最大 2-マッチング問題

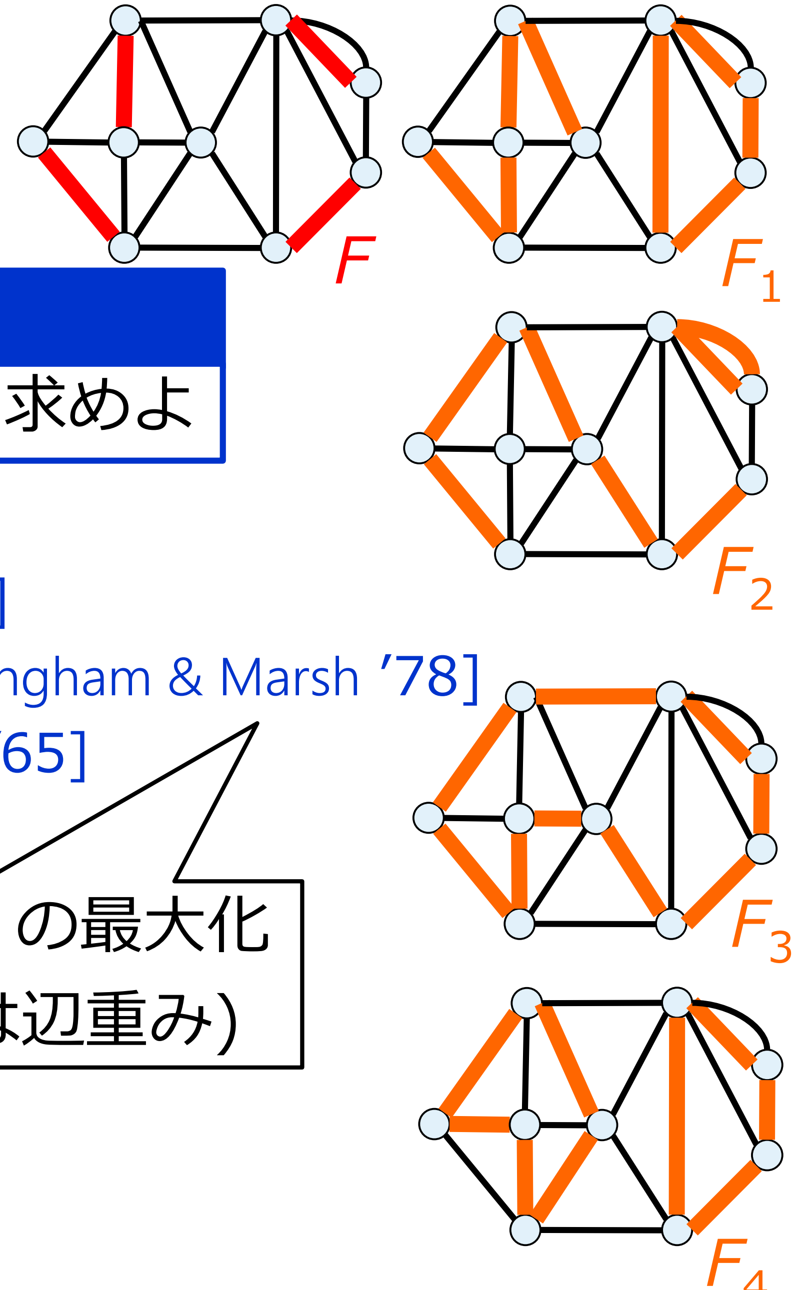
- $\Sigma_{e\in E}\, x(e)$ が最大の **2-マッチング**を求めよ

➢ **多項式時間可解**

- **最大最小定理** [Tutte '47, Berge '58]
- **整数性**をもつ**線形計画表現** [Cunningham & Marsh '78]
- **組合せ的アルゴリズム** [Edmonds '65]

$\Sigma_{e\in E}\, w(e)x(e)$ の最大化
(w: $E \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$ は辺重み)



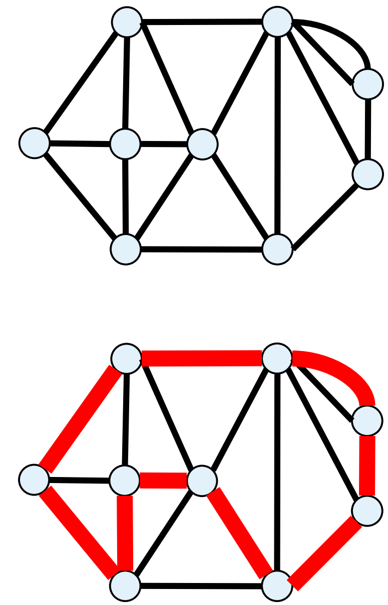


ハミルトン閉路問題

定義

- $F \subseteq E$ が **ハミルトン閉路**
  ⇔ F は全頂点をちょうど１回通る閉路

⇔ $\begin{cases} F \text{ は全頂点に２本の辺が接続} \\ \text{辺数 } |V| - 1 \text{ 以下の閉路を含まない} \end{cases}$



ハミルトン閉路問題

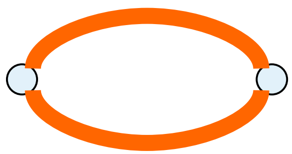
- (V,E) がハミルトン閉路をもつかどうか判定せよ

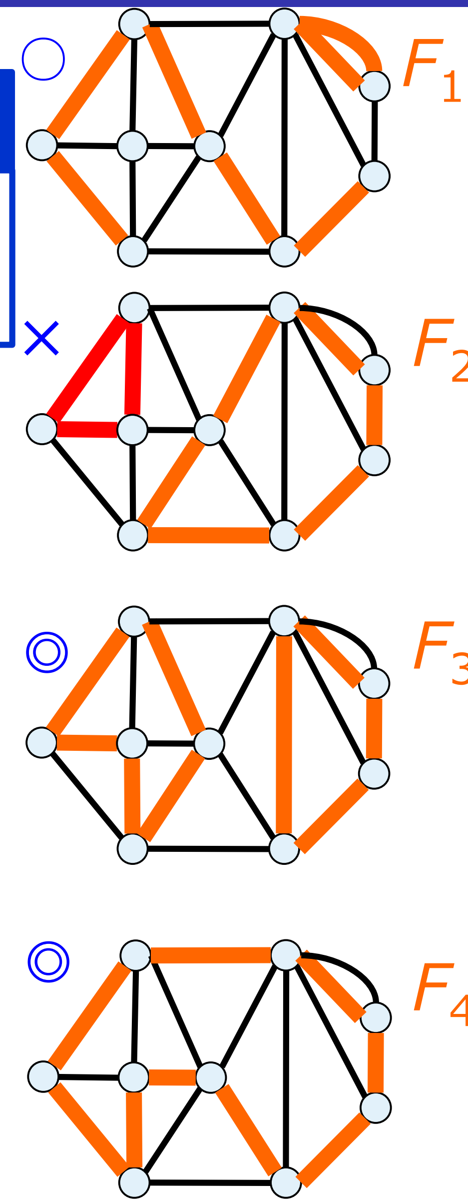
➢ **NP 困難**

Triangle-free 2-マッチング

定義 (Triangle-free 2-マッチング)

- 2-マッチング $x \in \{0,1,2\}^E$ が **Triangle-free**
  $\Leftrightarrow$ **辺数 3 の閉路**をもたない

➢  は OK



定理 [Cornuéjols & Pulleyblank '80]

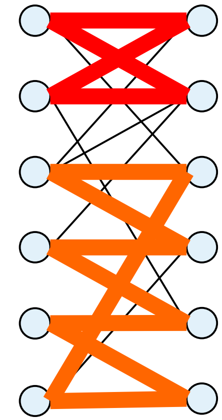
- **$\Sigma x(e)$ の最大化** および
  $\Sigma w(e)x(e)$ の最大化 は**多項式時間可解**
  - ➢ **最大最小定理**
  - ➢ **整数性をもつ線形計画表現**
  - ➢ **組合せ的アルゴリズム**

単純 Square-free 2-マッチング

定義 (Square-free 2-マッチング)

- 単純 2-マッチング $x \in \{0,1\}^E$ が **Square-free**
  $\Leftrightarrow$ **辺数 4 の閉路**をもたない

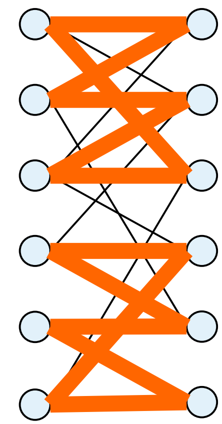
×



2部グラフでの先行研究

- **$|F|$ の最大化: 多項式時間可解**
  - 最大最小定理 [Kiraly ’99, Frank ’03]
  - 組合せ的アルゴリズム [Hartvigsen ’99, ’06; Pap ’07]
  - 正準分解 [**T.** ’15]
- **$w(F)$ の最大化: NP 困難**
  - ある条件 (後述) のもとで**多項式時間可解**
    - ✓ 整数性をもつ線形計画表現＋楕円体法 [Makai ’07]
    - ✓ 組合せ的アルゴリズム [**T.** ’09]

◎



- **一般グラフ**での **$|F|$ の最大化**: **未解決**
  - 離散凸構造はある [小林, Szabó, **T.** ’12]

目次

本研究の枠組: $\mathcal{U}$-実行可能 t-マッチング

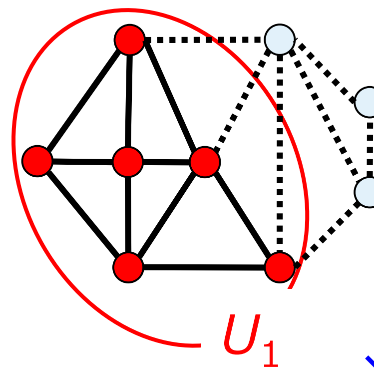
- **頂点の部分集合族 $\mathcal{U} \subseteq 2^V$**

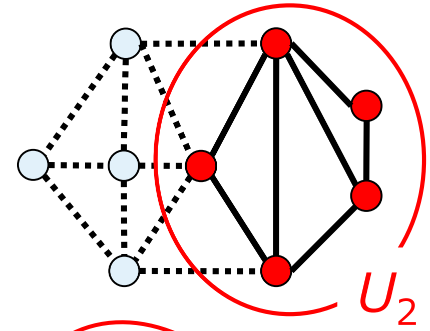
定義

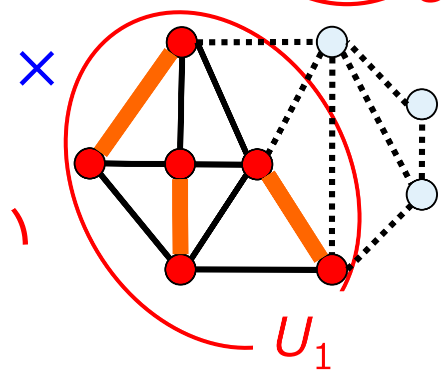
t-マッチング $x \in \mathbf{Z}^E$ が **$\mathcal{U}$-実行可能**

$\Leftrightarrow$ $^\forall U \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x(E[U])} \leq \left\lfloor \frac{\boldsymbol{t|U|-1}}{\boldsymbol{2}} \right\rfloor$

$\Leftrightarrow$ $^\forall U \in \mathcal{U},\ G[U]$ の完全 t-マッチングを含まない



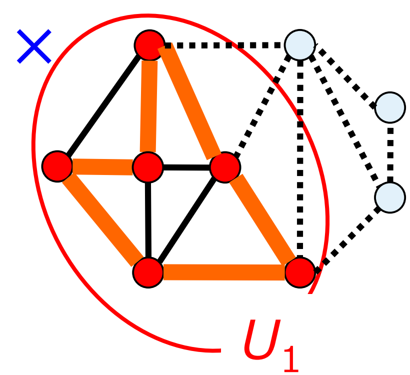


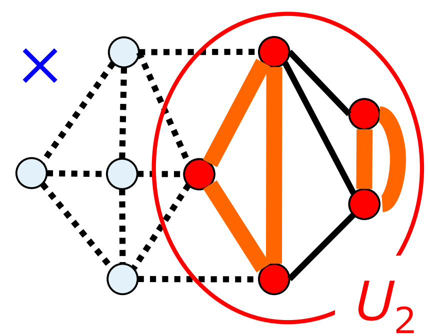


- $t=1$: $x(E[U]) \leq \left\lfloor \frac{|U|-1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{|U|}{2} - 1 & (|U|\text{: 偶数}) \\ \cancel{\frac{|U|-1}{2} \quad (|U|\text{: 奇数})} \end{cases}$

- $t=2$: $x(E[U]) \leq \left\lfloor \frac{2|U|-1}{2} \right\rfloor = |U| - 1$

[**T.** '16]





➢ **$\mathcal{U}=2^V \setminus \{V\}$: ハミルトン閉路**

本研究で解いた範囲

本研究の成果

◆ G: 2部グラフ
◆ ${}^{\forall}U \in \mathcal{U}$ に **縮約・拡張操作** が可能 (cf. Factor-critical 性)
な場合における
✓ **最大最小定理**
✓ **組合せ的アルゴリズム**

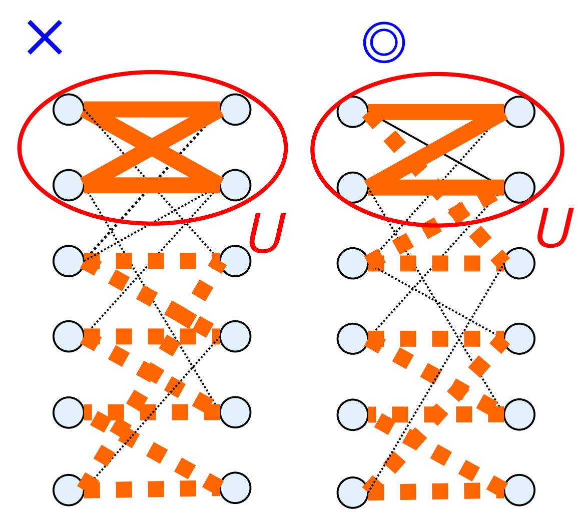
拡張 →

重み付き (w に ある仮定)
➢ **線形計画表現+整数性**
➢ **組合せ的アルゴリズム**

◆ **含まれる問題:**

一般グラフ, t=1
(次ページ)

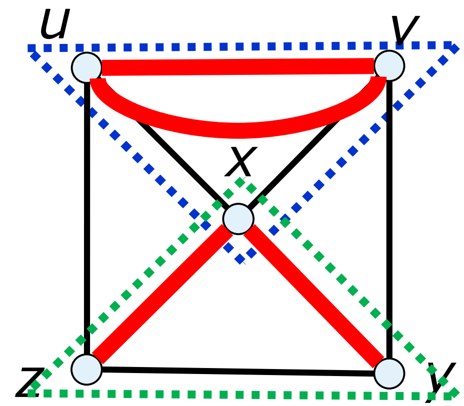
➢ **マッチング**
➢ **Triangle-free 2-マッチング**
➢ **単純 square-free 2-マッチング**
(**2部グラフ**)
- $\mathcal{U} = \{U : U \subseteq V, |U|=4\}$
- $t=2$
➔ $x(E[U]) \leq |U| - 1 = 3$

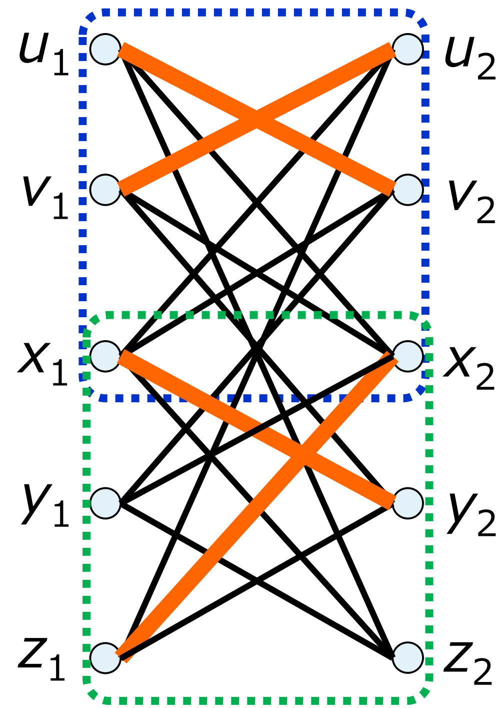


Triangle-free 2-マッチング を２部グラフに帰着

- $G=(V,E)$: 一般グラフ

- $G'=(V',E')$: ２部グラフ
  - $V' = V_1 \cup V_2$
  - $E' = \{u_1v_2,\ v_1u_2 : uv \in E\}$
- $t = 1$
- $\mathcal{U} = \{U_1 \cup U_2 : U \subseteq V,\ |U|=3\}$





命題

|G の最大 triangle-free 2-マッチング|

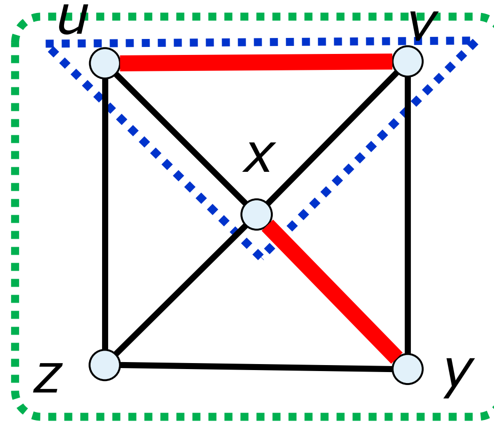
= |G' の最大 $\mathcal{U}$-実行可能 1-マッチング|

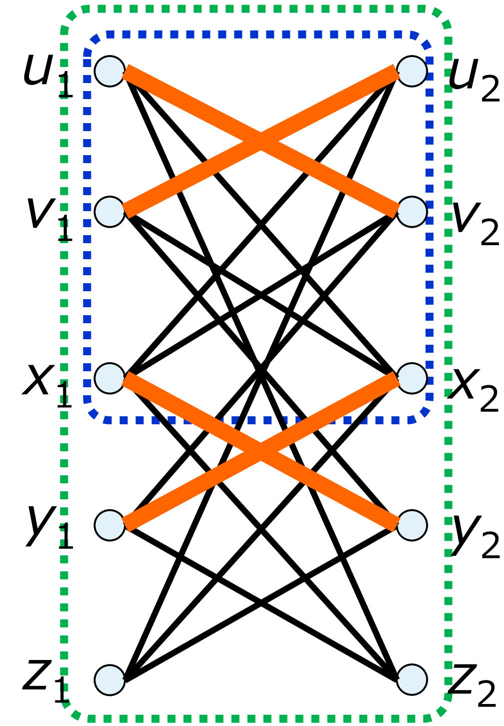
一般グラフのマッチング を２部グラフに帰着

- $G=(V,E)$: **一般グラフ**

⇩

- $G'=(V',E')$: **２部グラフ**
  - $V' = V_1 \cup V_2$
  - $E' = \{u_1v_2,\ v_1u_2 : uv \in E\}$
- $t = 1$
- **$\mathcal{U} = \{U_1 \cup U_2 : U \subseteq V,\ |U|$ は奇数$\}$**



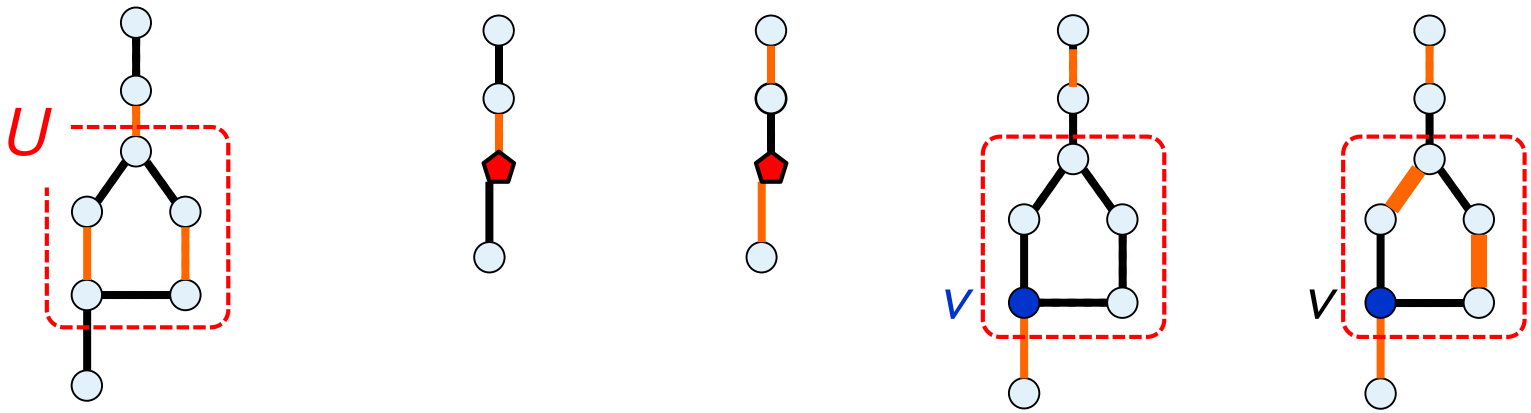


命題

2 × |G の最大マッチング|
= |G' の最大 $\mathcal{U}$-実行可能 1-マッチング|

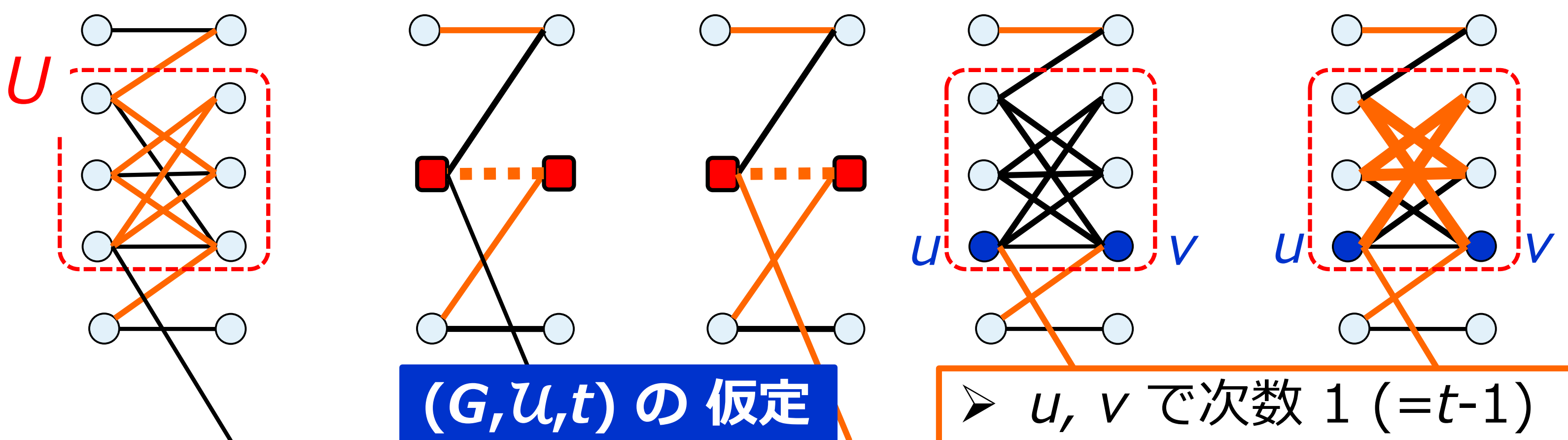
アルゴリズム

➢ 一般グラフのマッチング: **奇閉路の縮約・拡張** [Edmonds '65]



U-v の完全マッチング

➢ $\mathcal{U}$-実行可能 t-マッチング: **$U \in \mathcal{U}$ の縮約・拡張**



($G,\mathcal{U},t$) の 仮定

これが常に可能

- ➢ u, v で次数 1 (=t-1)
- ➢ U のその他の頂点は次数 2 (=t)
- ➢ 周囲の $U' \in \mathcal{U}$ でも実行可能

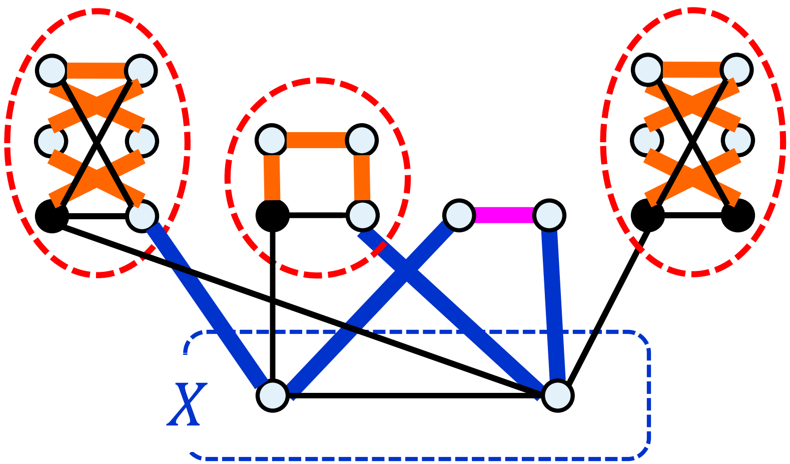
最大最小定理

定理

- G: 2部グラフ
- 縮約・拡張操作が常に可能

➔ $\max\{|F| : F$ は $\mathcal{U}$-実行可能 t-マッチング$\}$

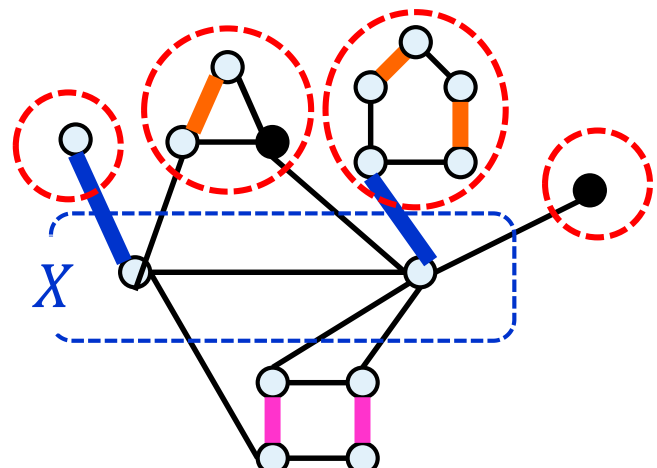
$$=\min\left\{ t|X| + |E[C_{V-X}]| + \sum_{U\in\mathcal{U}(V-X)} \left\lfloor \frac{t|U|-1}{2} \right\rfloor \right\}$$



定理 [Tutte '47, Berge '58]

$\max\{|M| : M$ はマッチング$\}$

$$= \frac{1}{2}\min\{|V| + |X| - \mathrm{odd}(X) : X \subseteq V\}$$



目次

マッチングの線形計画表現

最大重みマッチング

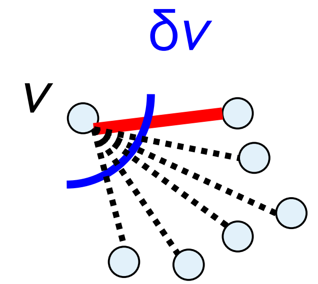
Maximize　　$\Sigma_{e \in E}\, w(e)\, x(e)$

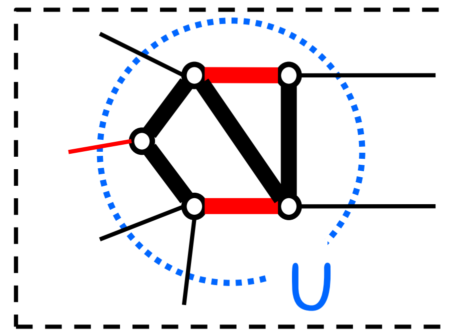
subject to　　$\Sigma_{e \in \delta v}\, x(e) \leq 1$　　　$(v \in V)$

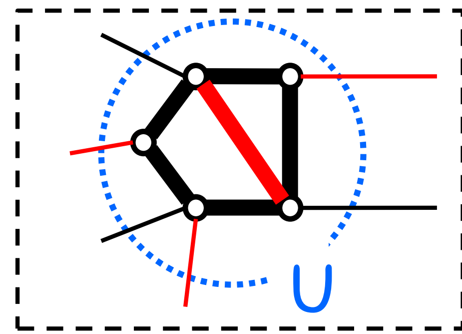
$\boldsymbol{\Sigma_{e \in E[U]}\, x(e) \leq \frac{|U|-1}{2}}$　$(U \subseteq V,\ |U|$ は奇数$)$

$x(e) \geq 0$　　　　E)

$$\left\lfloor \frac{|U|-1}{2} \right\rfloor$$







定理 [Cunningham & Marsh ’78]

上記は **整数最適解** および **双対整数最適解** をもつ

ハミルトン閉路の線形計画表現

巡回セールスマン問題の整数計画表現

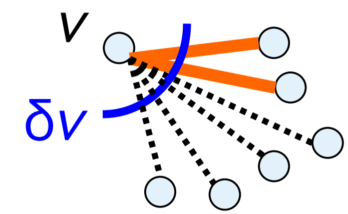
Minimize $\quad \Sigma_{e\in E}\, w(e)\, x(e)$

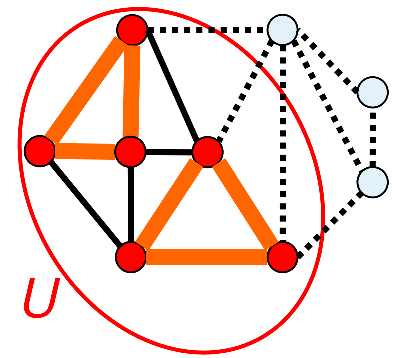
subject to $\quad \Sigma_{e\in\delta v}\, x(e) = 2 \qquad (v\in V)$

$\quad \boldsymbol{\Sigma_{e\in E[U]}\, x(e) \le |U| - 1} \qquad (U\subseteq V)$

$\quad \boldsymbol{x(e)\in\{0,1\}} \qquad (e\in E)$

$\left\lfloor \frac{2|U|-1}{2} \right\rfloor$





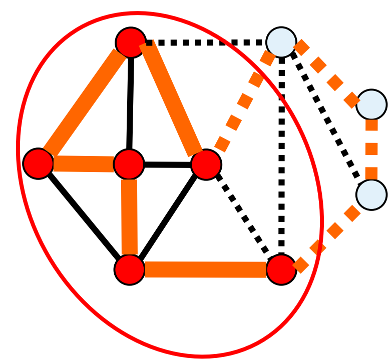
予想 [Goemans '95]

辺長 ***w*** が三角不等式をみたすとき,

上記の整数性ギャップは高々 $\frac{4}{3}$

i.e., **整数計画の最適値**

≥ **線形緩和の最適値** ≥ $\frac{3}{4}$ × **整数計画の最適値**



Triangle-free 2-マッチングの線形計画表現

最大重み triangle-free 2-マッチング

Maximimize　　$\Sigma_{e\in E}\, w(e)\, x(e)$

subject to　　$\Sigma_{e\in\delta v}\, x(e) \le 2$　　　$(v\in V)$

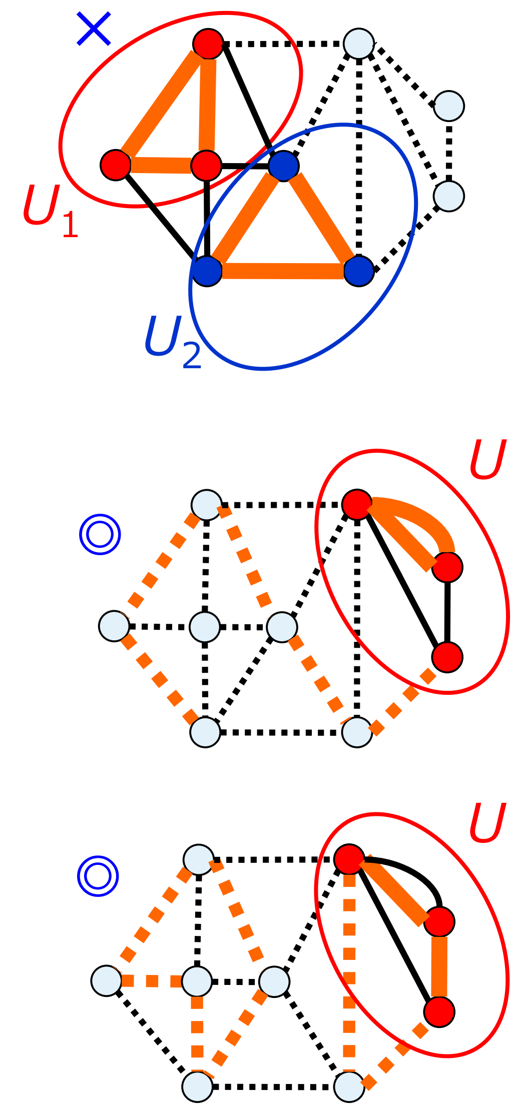
　　　　　　　$\boldsymbol{\Sigma_{e\in E[U]}\, x(e) \le 2}$　　$(U\subseteq V,\ |U|=3)$

　　　　　　　$\boldsymbol{x(e)\ge 0}$　　　　　$(e\in E)$

$$\left\lfloor \frac{2|U|-1}{2} \right\rfloor$$

定理 [Cornuéjols & Pulleyblank ’80]

整数最適解をもつ



単純 square-free 2-マッチングの線形計画表現

最大重み単純 square-free 2-マッチング

Maximize $\sum_{e\in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\sum_{e\in \delta v} x(e) \le 2 \qquad (v\in V)$

$\boldsymbol{\sum_{e\in E[U]} x(e) \le 3} \qquad (U\subseteq V,\ |U|=4)$

$\boldsymbol{0 \le x(e) \le 1} \qquad (e\in E)$

$$\left\lfloor \frac{2|U|-1}{2} \right\rfloor$$

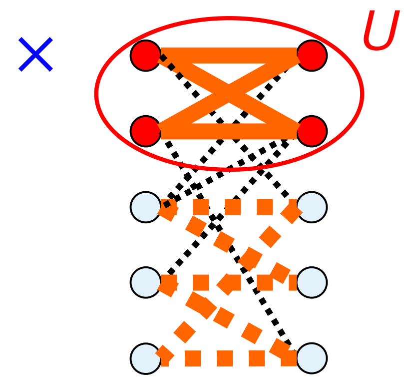
定理 [Makai '07, T. '09]

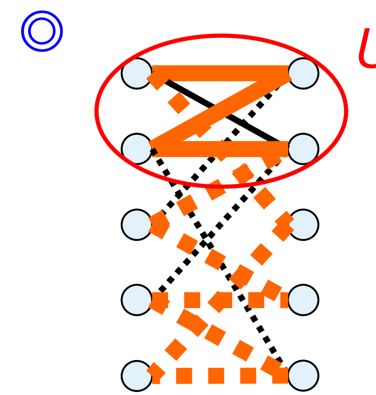
- G: 2部グラフ
- 辺重み w が以下をみたす:

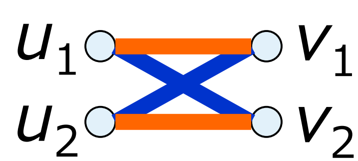
  任意の square U において

  $w(u_1v_1)+w(u_2v_2) = w(u_1v_2)+w(u_2v_1)$

➔ **整数最適解**および**双対整数最適解**をもつ







最大重み $\mathcal{U}$-実行可能 t-マッチングの線形計画表現[2]

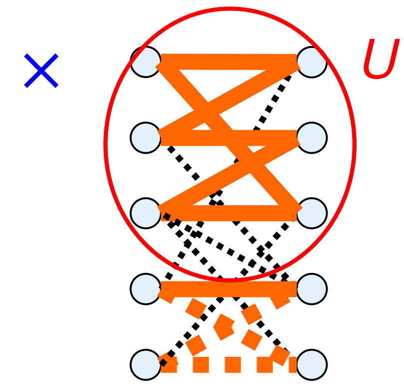
最大重み $\mathcal{U}$-実行可能 t-マッチング

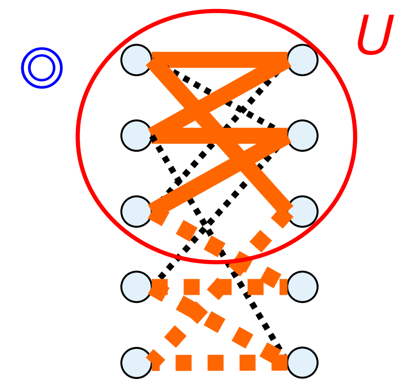
Maximize $\quad \sum_{e\in E} w(e)\, x(e)$

subject to $\quad \sum_{e\in \delta v} x(e) \le t \qquad (v\in V)$

$$\sum_{e\in E[U]} x(e) \le \left\lfloor \frac{t|U|-1}{2} \right\rfloor \qquad (U\in \mathcal{U})$$

$$x(e) \ge 0 \qquad (e\in E)$$





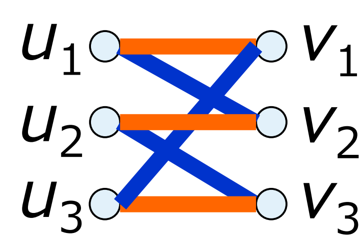
定理

- G: 2 部グラフ
- **縮約・拡張操作が可能**
- 辺重み w が以下をみたす:

  任意の *square* U において

  任意の完全マッチングの重みが等しい

➔ **整数最適解**および**双対整数最適解**をもつ



目次

1. 導入

2. 既存の問題

- マッチング
- Triangle-free 2-マッチング
- 単純 square-free 2-マッチング
- ハミルトン閉路

3. 本枠組: $\mathcal{U}$-実行可能 2-マッチング

- ➢ 最大最小定理
- ➢ 組合せ的アルゴリズム

4. 重み付き版

- ➢ 線形計画表現
- ➢ 組合せ的アルゴリズム

5. まとめ

まとめ

本枠組

- マッチング

↓

- Triangle-free 2-マッチング
- ２部グラフにおける
  単純 Square-free 2-マッチング

↓

- ハミルトン閉路

本研究

- **最大最小定理**
- **整数性をもつ線形計画表現**
- **組合せ的アルゴリズム**

- **偶因子**
  [Cunningham, Geelen ’01]
- ***$K_{t,t}$*-free *t*-マッチング**
  [Frank ’03]
- **3,4-辺カットを被覆する 2-マッチング**
  [Kaiser, Škrekovski ’04,08]
  [Boyd, 岩田, **T.** ’13]

参考文献

- K. Takazawa: **Excluded *t*-factors in bipartite graphs: A unified framework for nonbipartite matchings and restricted 2-matchings**, *Proc. IPCO 2017, LNCS*, to appear.

- G. Cornuéjols, W. Pulleyblank: **A matching problem with side conditions**, *Discrete Math.* 29 (1980), 135—159.
- D. Hartvigsen: **Finding maximum square-free 2-matchings in bipartite graphs**, *J. Combin. Theory B,* 96 (2006), 693—705.
- G. Pap: **Combinatorial algorithms for matchings, even factors and square-free 2-factors,** *Math. Program.* 110 (2007), 57—69.
- K. Takazawa: **A weighted even factor algorithm**, *Math. Program.* 115 (2008), 223—237.
- K. Takazawa: **A weighted $K_{t,t}$ -free *t*-factor algorithm for bipartite graphs**, *Math. Oper. Res.* 34 (2009), 351—362.
- K. Takazawa: **Finding a maximum 2-matching excluding prescribed cycles in bipartite graphs**, *Proc. MFCS 2016, LIPIcs* 58, 87:1—87:14

END of slides