最小木問題 と 最短巡回路問題

—離散数学の “解ける” 問題 と “解けない” 問題—

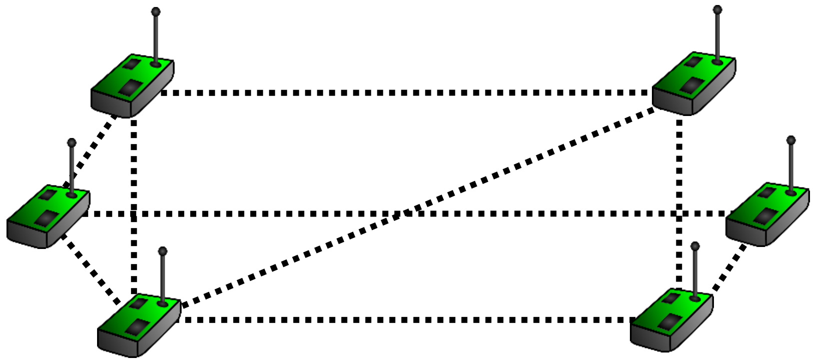
高澤 兼二郎

法政大学

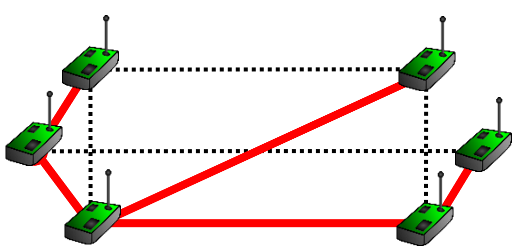
「離散数学」講義資料
2016 年 6 月 8 日

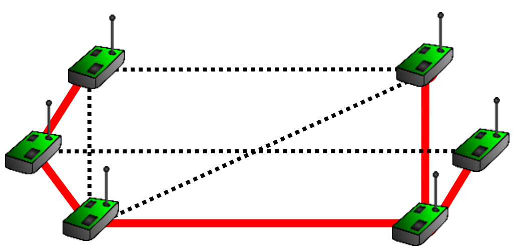
ネットワーク上の最適化問題 その１

ネットワーク



問題: すべてのセンサー間で通信ができるためには
どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

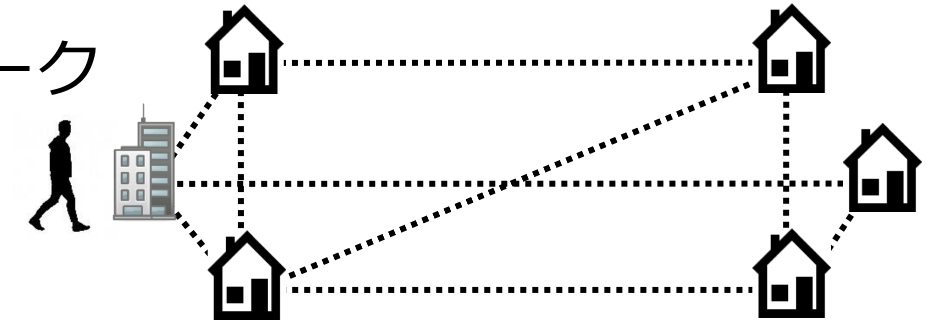




- ➢ すべてのセンサーを連結させる
- ➢ 閉路は不要

ネットワーク上の最適化問題 その2

ネットワーク



問題: すべての地点を一度ずつ通り元の地点に戻ってくる
最短の経路は？

目次

- イントロダクション

- 離散最適化問題
  - 問題の定式化
  - 離散最適化問題を「解く」とは？

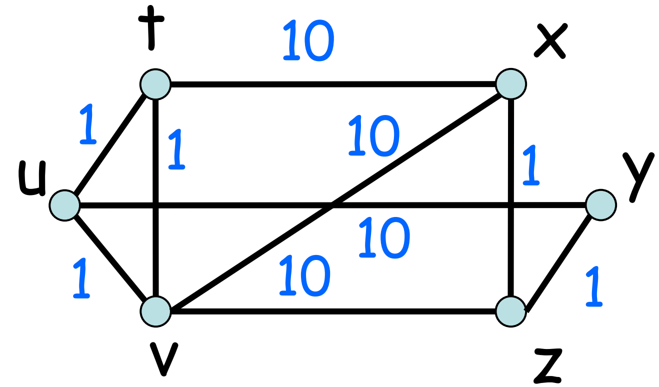
- 最小全域木問題
  - Prim のアルゴリズム
  - Kruskal のアルゴリズム

- 巡回セールスマン問題
  - Christofides のアルゴリズム

最小全域木問題の定義

グラフ $G = (V, E)$
- 頂点集合 $V = \{t, u, v, x, y, z\}$
- 辺集合 $E = \{tu, tv, tx, uv, uy, vx, vz, xz, yz\}$

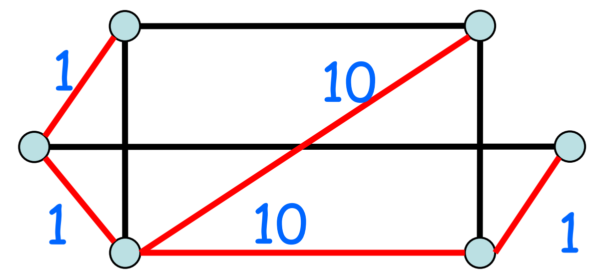
辺重み $w: E \to R_{\geq 0}$
- $w(tu) = 1$, $w(tx) = 10$,…



定義

辺部分集合 $F \subseteq E$ が **全域木**

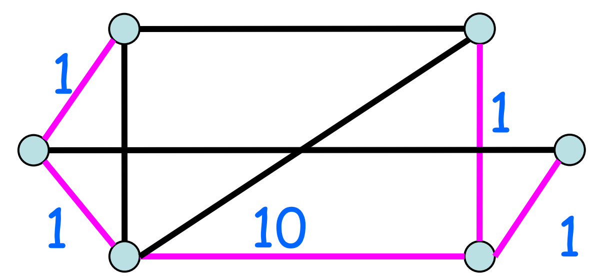
⇔
- 任意の２頂点間に道が存在する
- 閉路を含まない



$w(F_1) = 23$

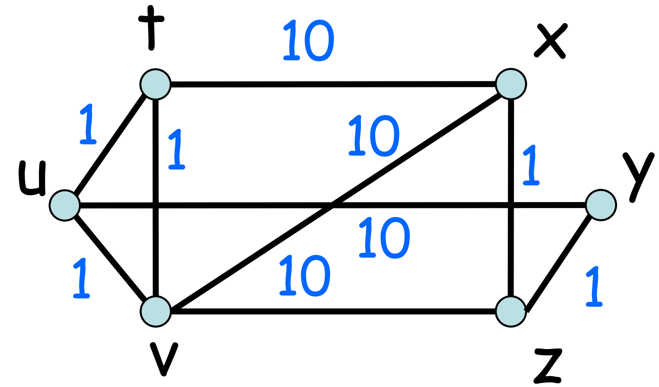
最小全域木問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の全域木を求めよ



$w(F_2) = 14$

巡回セールスマン問題の定義

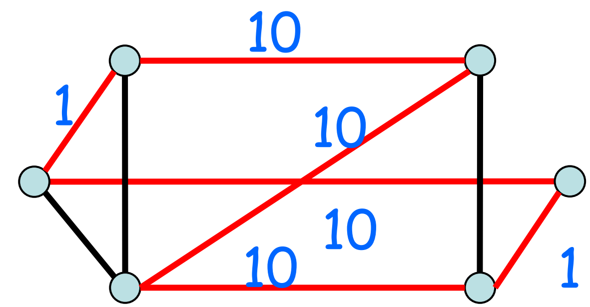


グラフ G = (V, E)

- 頂点集合 V = {t, u, v, x, y, z}
- 辺集合 E = {tu, tv, tx, uv, uy, vx, vz, xz, yz}

辺重み w: E→$R_{\geq 0}$

- w(tu) = 1, w(tx) = 10,…

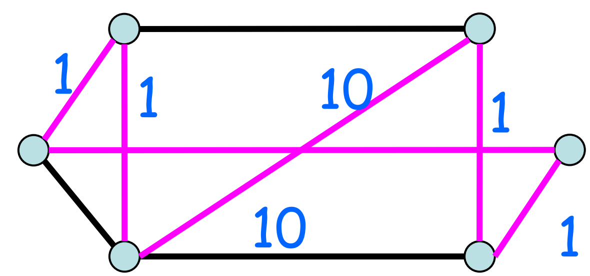


w(C_1) = 42

定義

辺部分集合 C⊆E が**ハミルトン閉路**

⟺　全頂点を丁度１回通る閉路



w(C_2) = 24

巡回セールスマン問題

重み w(C) = $\sum_{e \in C}$ w(e) 最小の
ハミルトン閉路を求めよ

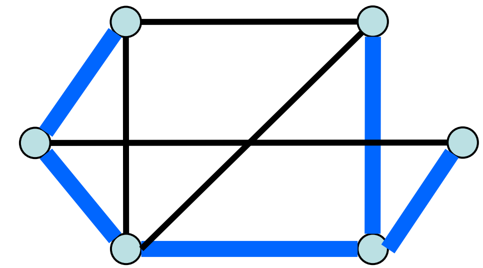
離散最適化問題を “解く” とは？

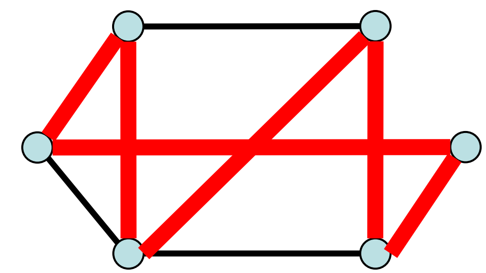
最小全域木問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の全域木を求めよ

巡回セールスマン問題

重み $w(C) = \sum_{e \in C} w(e)$ 最小のハミルトン閉路を求めよ





計算機科学者の認識:

- 最小全域木問題: **解ける!!**
- 巡回セールスマン問題: **解けない…**

(と予想されている)

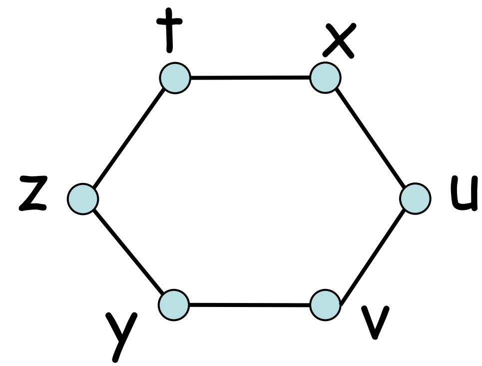
(*^○^*)「ハミルトン閉路の個数は有限だから・・・」

(*^○^*)「コンピュータでしらみつぶしをするんだ！」

しらみつぶしをすると…？

- ハミルトン閉路 ≒ 円順列, 数珠順列

  ➔ $\frac{(n-1)!}{2}$ 通り調べればよい ($n = |V|$)



	$\frac{(n-1)!}{2}$	計算時間
n = 6	60	0.00000006 秒
n = 10	181440	0.00018144 秒
n = 20	6×10^{16}	6×10^{7} 秒 = 70 日
n = 33	131565418466846765083609006080000000	

≒ 1.3×10^{35}

400京 年

毎秒 10^9 回の演算ができるコンピュータ

1962年, 1万ドルの懸賞問題

(*^○^*) → (●▲●)

「解く」といえる手間はどれくらい？

	$n!$	2^n	n^3
n = 10	0.0001 秒	0.000001 秒	0.000001 秒
n = 20	70 日	0.01 秒	0.00002 秒
n = 50	(>_<)	13 日	0.0001 秒
n = 100	(>_<)	40 兆年	0.001 秒

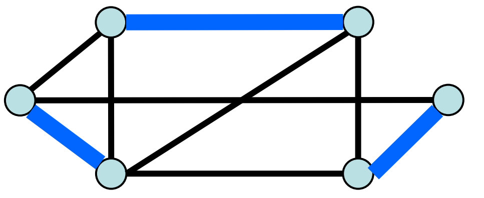
- $n^{\blacksquare}$ 回の演算: 現実的な計算時間

"良い" アルゴリズム
(多項式時間アルゴリズム)

- 多項式時間アルゴリズムが存在する問題: **クラス P**
  例: 最小全域木問題

P と NP

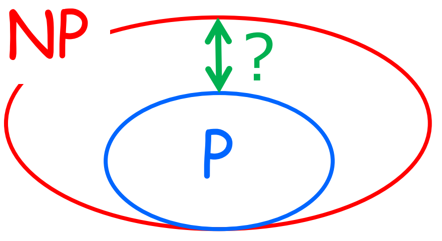
- **クラス P**：多項式時間で解が見つけられる問題のクラス
  - 最小全域木問題
  - 最小重み完全マッチング問題



- **クラス NP** ：多項式時間で解の検証ができる問題のクラス
  - 長さが 40 以下のハミルトン閉路はあるか？

  ➔ 巡回セールスマン問題: クラスNPに属する

✓ P⊆NP



P≠NP 問題: クラス P と NP は等しいか否か？？

- 100万ドルの懸賞問題 (クレイ研究所)

目次

- イントロダクション

- 離散最適化問題
  - 問題の定式化
  - 離散最適化問題を「解く」とは？

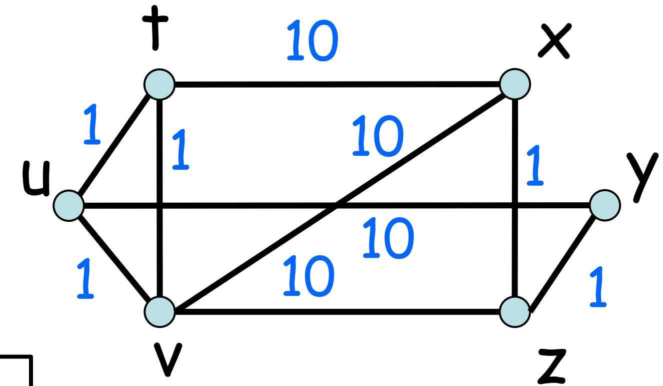
- 最小全域木問題
  - Prim のアルゴリズム
  - Kruskal のアルゴリズム

- 巡回セールスマン問題
  - Christofides のアルゴリズム

最小全域木問題

グラフ $G = (V, E)$

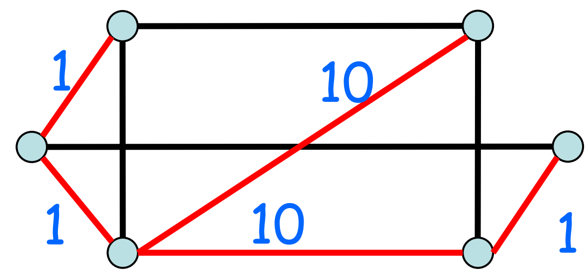
辺重み $w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$



定義

辺部分集合 $F \subseteq E$ が **全域木**

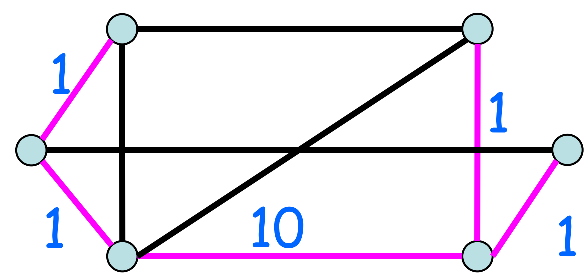
⟺
- 任意の２頂点間に道が存在する
- 閉路を含まない



$w(F_1) = 23$

最小全域木問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の全域木を求めよ



$w(F_2) = 14$

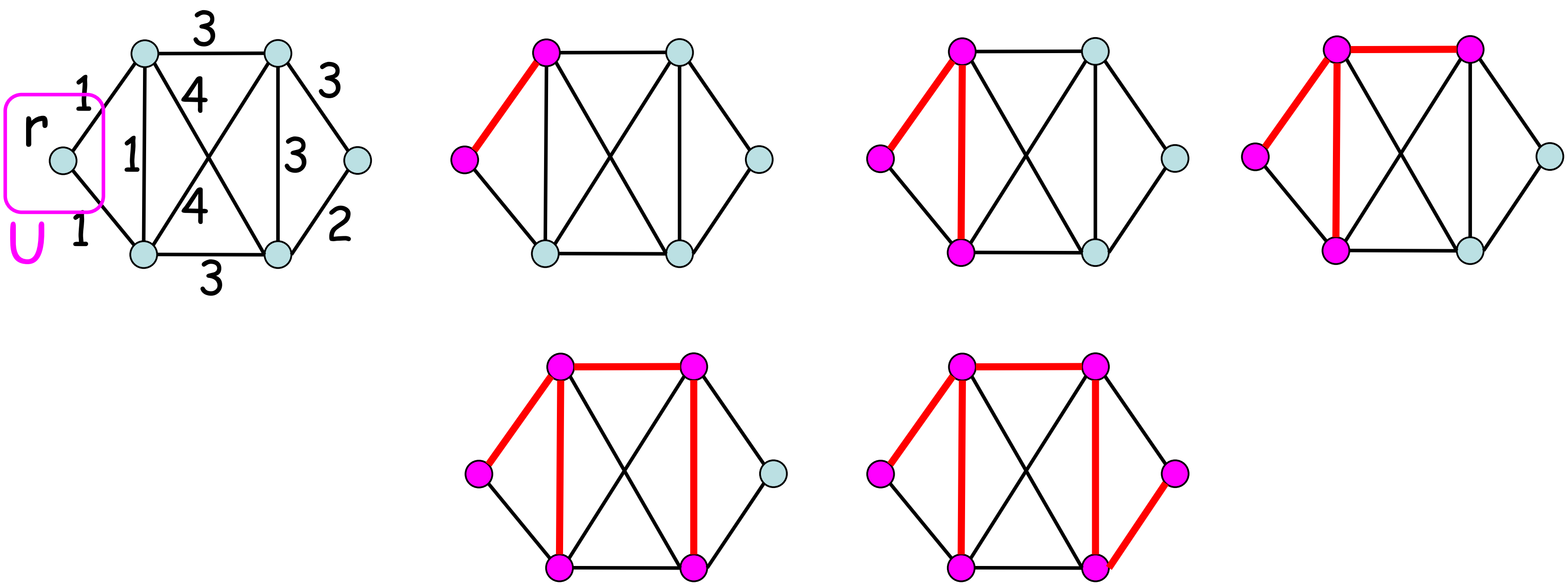
Prim のアルゴリズム

Jarník 1930
Prim 1957
Dijkstra 1959

初期化: 頂点 $r \in V$ を指定, $U := \{r\}$, $F := \emptyset$

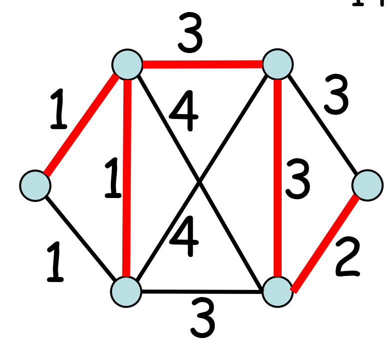
反復: $U = V$ でなければ, 以下を実行:

- ➢ $e=uv : \min\{w(e) : e \in E,\ u \in U,\ v \in V - U\}$ を達成する辺
- ➢ $F := F \cup \{e\}$, $U := U \cup \{v\}$



U = V となったので終了

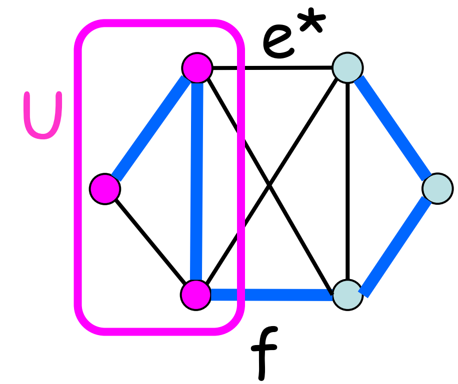
Prim のアルゴリズムの正当性



定理

Prim のアルゴリズムは最小全域木 F を出力する

【証明】 |F| に関する帰納法で以下を示す:
アルゴリズム中の F に対し, 常に「F を含む最小全域木が存在する」



- |F| = 0 のときは明らか
- |F| = k-1 のとき成り立つとする
  - H : F を含む最小全域木
  - e* : アルゴリズムで F に加えた辺
  - e*∈H ならば, |F|=k のときも成立
  - さもなくば,
    - F∪{e*} は閉路 C を含む (F は e* の両端点間に道をもつ)
    - C は U と V-U を繋ぐ e* 以外の辺 f を含む
    - アルゴリズムのルールから w(e*) ≤ w(f)
    - $H \cup \{e^*\} \setminus \{f\}$ も全域木で，H は最小全域木なので w(f) ≤ w(e*)
    - w(e*) = w(f) なので， $H \cup \{e^*\} \setminus \{f\}$ も最小全域木
    - F∪{e*} ⊆ $H \cup \{e^*\} \setminus \{f\}$ なので， |F| = k でも成立 【証明終】

Prim のアルゴリズムの計算時間

初期化: 頂点 $r \in V$ を指定, $U := \{r\}$, $F := \emptyset$

反復: $U = V$ でなければ, 以下を実行:

- $e=uv$: $\min\{w(e) : e \in E,\ u \in U,\ v \in V - U\}$ を達成する辺
- $F := F \cup \{e\}$, $U := U \cup \{v\}$

$n = |V|$
$m = |E|$

- 反復: $n - 1$ 回
- 各反復の手間: 高々 m

➔ nm に比例する時間でおさえられる

- Prim のアルゴリズムは**多項式時間アルゴリズム**
- 最小全域木問題は**クラス P に属する**

Kruskal のアルゴリズム

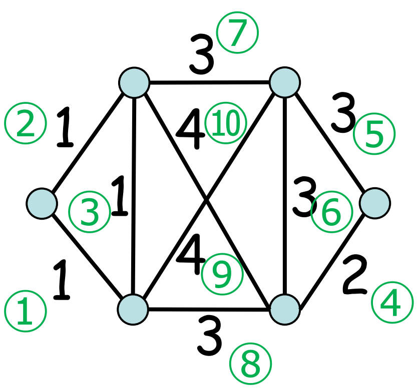
Kruskal 1956
Loberman & Weinberger 1957

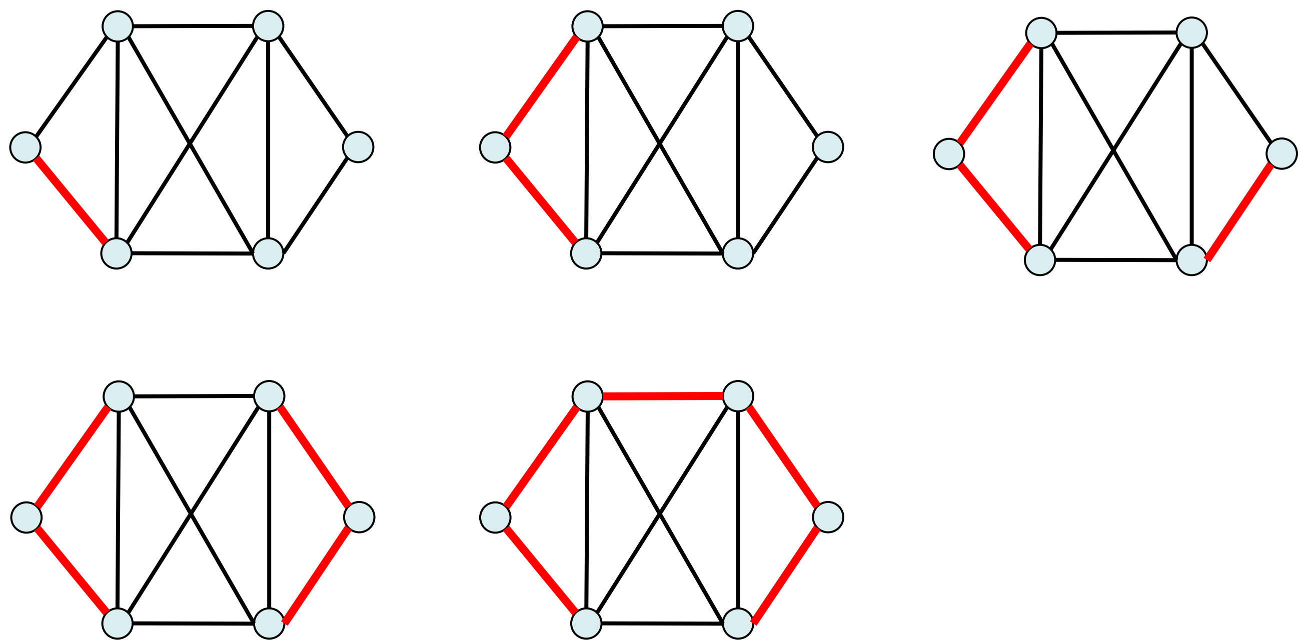
初期化: 辺を重みの小さい順にソート: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$

$F := \emptyset$, $i = 0$

反復: $|F| = n - 1$ でなければ, 以下を実行:

- $F \cup \{e_i\}$ が閉路を含まないならば $F := F \cup \{e_i\}$
- $i := i+1$





- 正当性
- 計算時間
  ➔演習課題

$|F| = n-1$ となったので終了

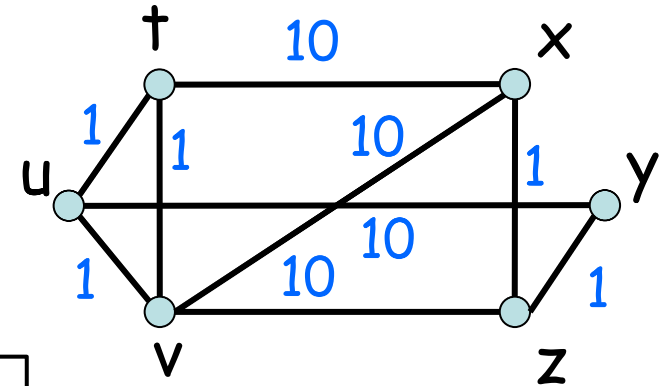
目次

- イントロダクション
- 離散最適化問題
  - 問題の定式化
  - 離散最適化問題を「解く」とは？
- 最小全域木問題
  - Prim のアルゴリズム
  - Kruskal のアルゴリズム
- 巡回セールスマン問題
  - Christofides のアルゴリズム

巡回セールスマン問題

グラフ $G = (V, E)$

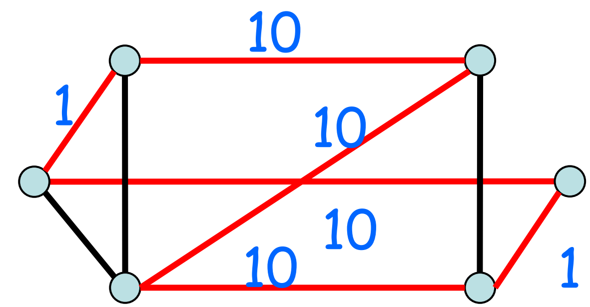
辺重み $w: E \to R_{\geq 0}$



定義

辺部分集合 $F \subseteq E$ が**ハミルトン閉路**

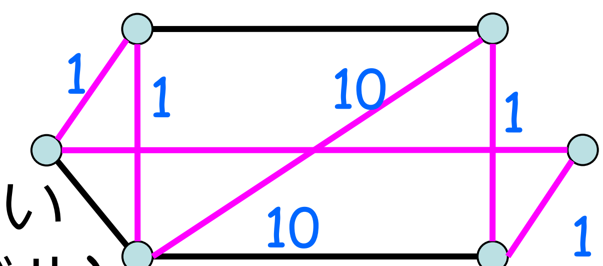
⟺ 全頂点を丁度１回通る閉路



$w(F_1) = 42$

巡回セールスマン問題

重み $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ 最小の
ハミルトン閉路を求めよ



$w(F_2) = 24$

- 多項式時間アルゴリズムは作られていない
  (作る or 作れないことを示す と 100万ドル)

巡回セールスマン問題へのアプローチ

- **計算時間**を妥協する

  $n^2 2^n$ に比例する計算時間で最適解を求める

  [Bellman 1962, Held-Karp 1962]

- **最適性**を妥協する

  多項式時間で「ある程度良い解」を求める

α-近似アルゴリズム

最適解が F* である問題に対し, 必ず

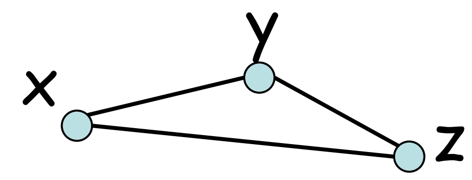
$$w(F) \leq \alpha \cdot w(F^*)$$

をみたす解 F を多項式時間で求めるアルゴリズム

- $\alpha \geq 1$
- α が 1 に近いほど良い

メトリック巡回セールスマン問題

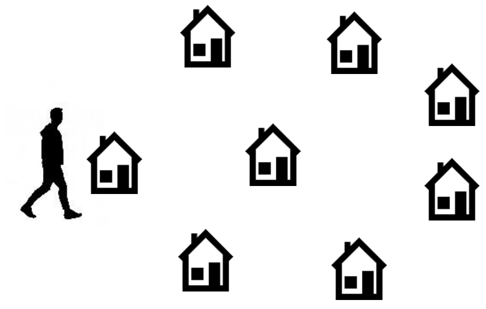
グラフ $G = (V, E)$, 辺重み $w: E \to R_{\geq 0}$



メトリック巡回セールスマン問題

- $E = \{uv : u,v \in V\}$ [Gは完全グラフ]
- w は **メトリック**
  - $w(xy) \geq 0$
  - $w(xy) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - $w(xz) \leq w(xy) + w(yz)$ [三角不等式]

例: ユークリッド距離



この仮定の下でも多項式時間アルゴリズムは作られていない

Christofides の 1.5-近似アルゴリズム

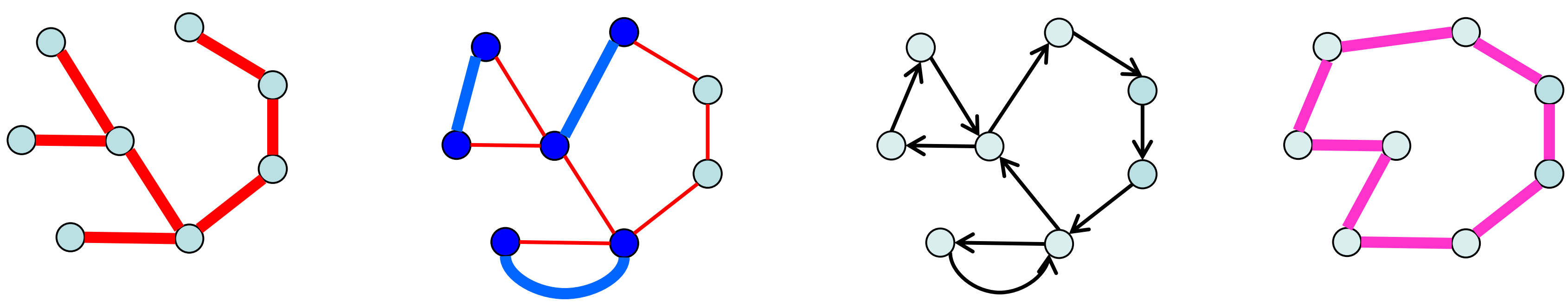
1976年

完全グラフ G = (V, E), メトリック重み w: E→$R_{\geq 0}$

ステップ1 G と w に対する最小全域木 F を求める

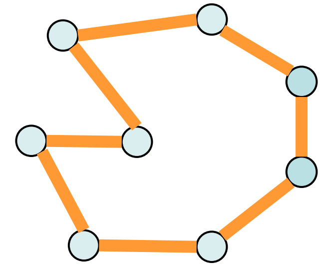
ステップ2 T⊆V : F の辺が奇数本接続している頂点の集合
T を端点とする最小重み完全マッチングMを求める
(|T| は必ず偶数 → 演習課題)

ステップ3 F + M : 全頂点を一度以上通る巡回路
F + M において，既に通った頂点をスキップ
➔ ハミルトン閉路 C



近似比の解析

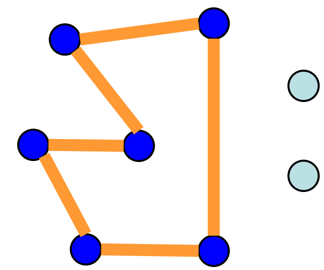
定理 Christofides のアルゴリズムは 1.5-近似



【証明】➢ C^* ：最適解

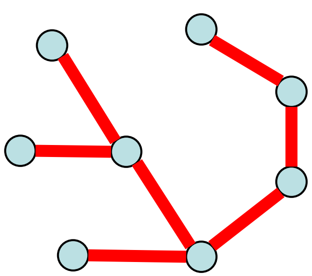
- $w(F) \leq w(C^*)$
- $w(C^*) \geq w(C^*(T)) \geq 2 \cdot w(M)$

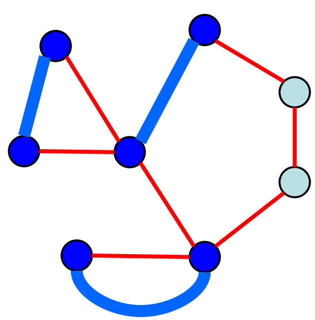
➔ $w(C) \leq w(F) + w(M) \leq 1.5 \cdot w(C^*)$

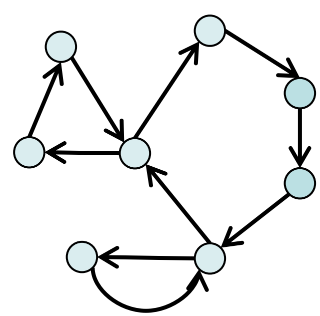


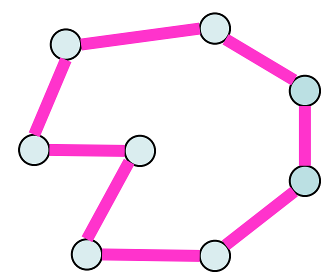
$C^*(T)$

【証明終】









目次

まとめ

- 離散最適化問題を「解く」 = **多項式時間**で最適解を求める
  - ➢ 最小全域木問題: 多項式時間で解ける
  - ➢ 巡回セールスマン問題: 多項式時間で解けるかわからない

- 最小全域木問題に対するアルゴリズム設計
  - ➢ Prim のアルゴリズム
  - ➢ Kruskal のアルゴリズム

- 巡回セールスマン問題に対する近似アルゴリズム設計
  - ➢ Christofides の 1.5-近似アルゴリズム
    (メトリック巡回セールスマン問題)