

2部グラフにおける 制約付き 2-マッチングの分解定理

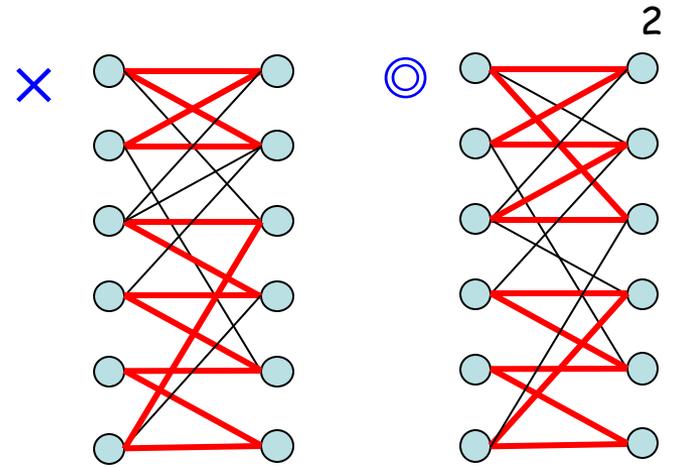
高澤 兼二郎

京都大学 数理解析研究所

研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」@ 統計数理研究所
2015年3月19日

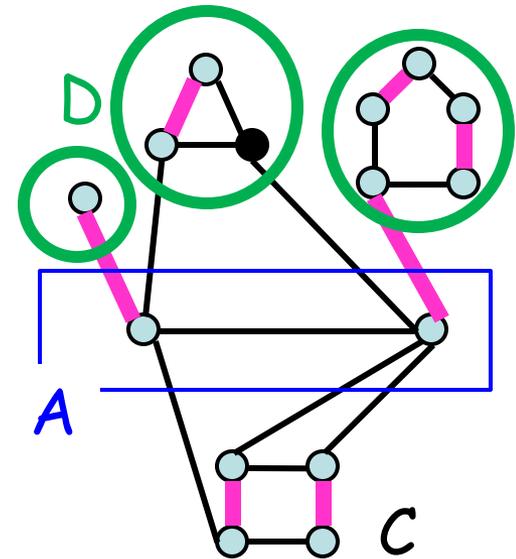
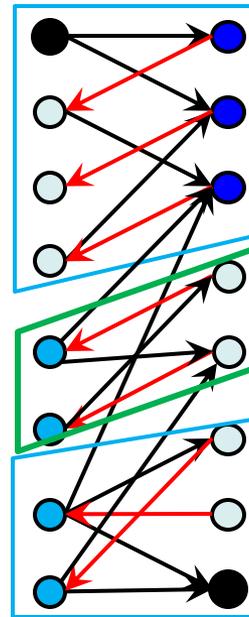
本研究の位置づけ

- 本研究の対象：
長さ 4 以下の閉路を含まない 2-マッチング
(C_4 -free 2-マッチング)



2部グラフにおけるマッチングの
Dulmage-Mendelsohn 分解

一般グラフにおけるマッチングの
Edmonds-Gallai 分解



[本研究] 2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチングの分解定理

目次

◆ C_k -free 2-マッチング

- 定義・動機
- 先行研究

◆ 古典的な定理

- 最大最小定理
 - 2部グラフのマッチング / 2-マッチング
 - 一般グラフのマッチング
- 分解定理
 - Dulmage-Mendelsohn 分解 (2部グラフ)
 - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

◆ 本研究：2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング

- 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
- 分解定理

2-マッチング

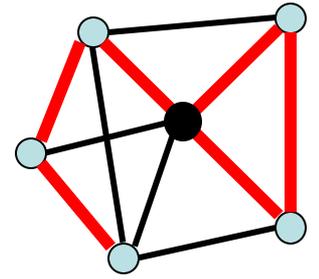
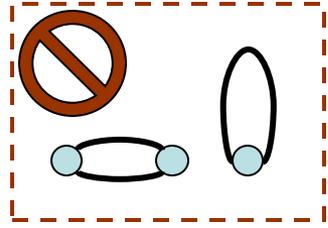
単純無向グラフ $G = (V, E)$

定義

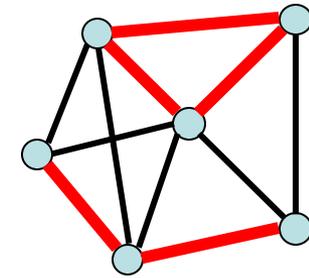
- $M \subseteq E$ が 2-マッチング
 ⇔ M の各頂点の次数 ≤ 2
- $M \subseteq E$ が 2-因子
 ⇔ M の各頂点の次数 $= 2$

閉路 + パス

閉路



×

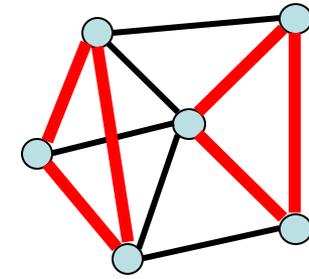


2-マッチング

問題

$|M|$ 最大の 2-マッチングを求める

- 多項式時間可解 (マッチングに帰着)



2-因子

C_k -free 2-マッチング

単純無向グラフ $G = (V, E)$

正整数 k

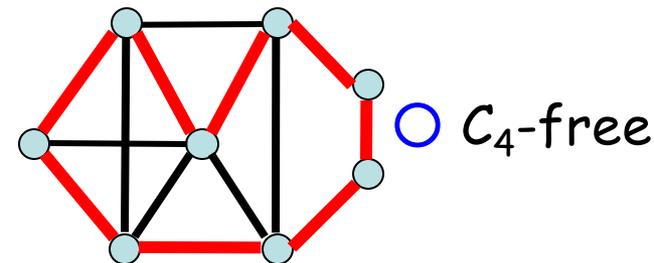
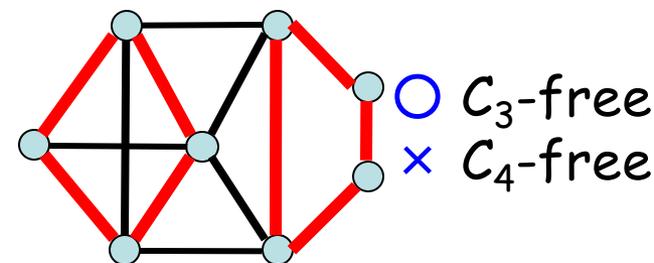
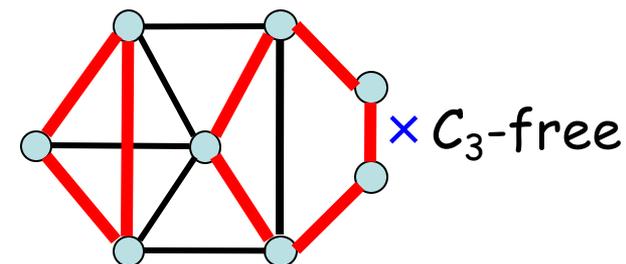
定義

2-マッチング $M \subseteq E$ が C_k -free
 \longleftrightarrow 長さ k 以下の閉路を含まない

問題

$|M|$ 最大の C_k -free 2-マッチングを
 求める

- $k \leq 2 \rightarrow$ 2-マッチング問題と同じ
- $k \geq n/2 \rightarrow$ ハミルトン閉路問題を含む
 (最適値 = $n \rightarrow$ ハミルトン閉路)



$$n = |V|$$

動機, 応用

◆ ハミルトン閉路問題の緩和問題

➤ C_k -free 2-因子を初期解とする
巡回セールスマン問題への
アプローチ

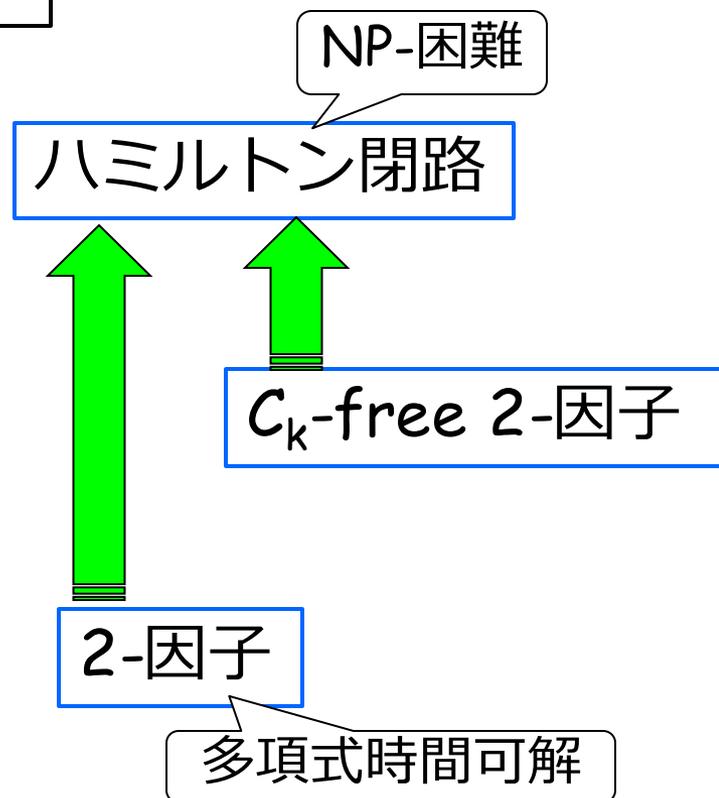
- Boyd, Iwata, T. '13
- Boyd, Sitters, van der Ster, Stougie '14
- Correa, Larré, Soto '12
- Karp, Ravi '14

◆ 連結度増大問題

$G = (V, E)$ が $(n - 3)$ -点連結

↔ G の補グラフは C_4 を含まない 2-マッチング

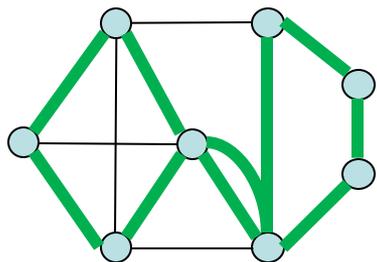
- Bérczi, Kobayashi '12



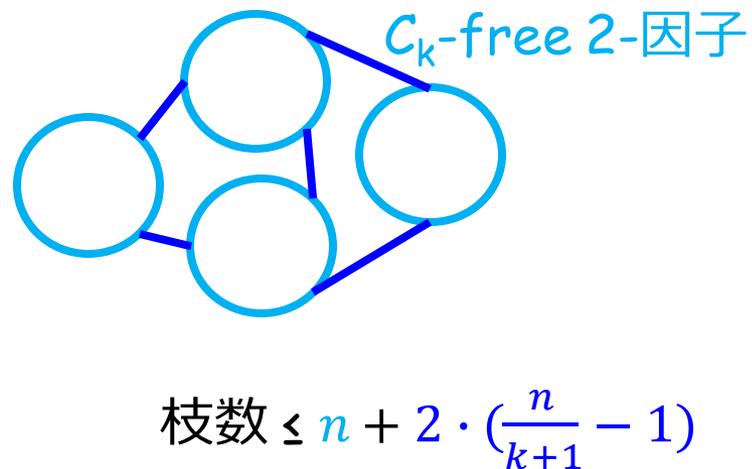
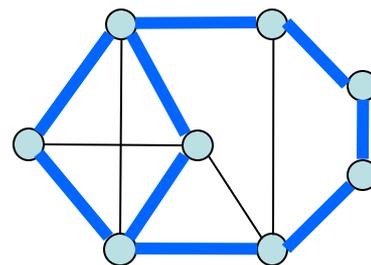
動機, 応用

◆ ハミルトン閉路問題の緩和問題

- グラフ的巡回セールスマン問題
(= 最小全域オイラー部分グラフ問題)



- 最小全域 2 辺連結部分グラフ問題



C_k -free 2-因子 $\rightarrow \left(1 + \frac{2}{k+1}\right)$ -近似

C_k -free 2-マッチングの計算複雑度

| 一般グラフ | 重みなし | 重み付き |
|--------------|---------------------------|------------------------|
| $k \geq n/2$ | NP 困難 | NP 困難 |
| $k \geq 5$ | NP 困難 (Papadimitriou '78) | NP 困難 |
| $k = 4$ | OPEN | NP 困難 (Vornberger '80) |
| $k = 3$ | P (Hartvigsen '84) | OPEN |
| $k = 2$ | P | P |

| 2部グラフ | 重みなし | 重み付き |
|--------------|-----------------------------|--------------------|
| $k \geq n/2$ | NP 困難 | NP 困難 |
| $k \geq 6$ | NP 困難 (Geelen '99) | NP 困難 (Geelen '99) |
| $k = 4$ | P (Hartvigsen '06, Pap '07) | NP 困難 (Király '03) |
| $k = 2$ | P | P |

枝重みがある性質をみたすとき

- 双対整数性をもつ多面体的表現 [Makai '07]
- 組合せ的アルゴリズム [T. '09]
- ジャンプシステム上のM凸関数 [Szabó, Kobayashi, T. '12]

2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング

2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング

- 最大最小定理 [Király '99, Frank '03]
- 双対整数性 [Makai '07]
- アルゴリズム [Hartvigsen '06, Pap '07; T. '09]
- 離散凸性 [Szabó, Kobayashi, T. '12]
- 分解定理 [本研究]

マッチング

- 最大最小定理 [Tutte '47, Berge '58]
- 完全双対整数性 [Edmonds '65, Cunningham-Marsh '78]
- アルゴリズム [Edmonds '65] など
- 離散凸性 [Chandrasekaran-Kabadi '88, Bouchet '89; Murota '97]
- 分解定理 [Dulmage-Mendelsohn '58; Gallai '63, Edmonds '65]

◆ C_k -free 2-マッチング

- 定義・動機
- 先行研究

◆ 古典的な定理

- 最大最小定理
 - 2部グラフのマッチング / 2-マッチング
 - 一般グラフのマッチング
- 分解定理
 - Dulmage-Mendelsohn 分解 (2部グラフ)
 - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

◆ 本研究：2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング

- 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
- 分解定理

2部グラフのマッチング

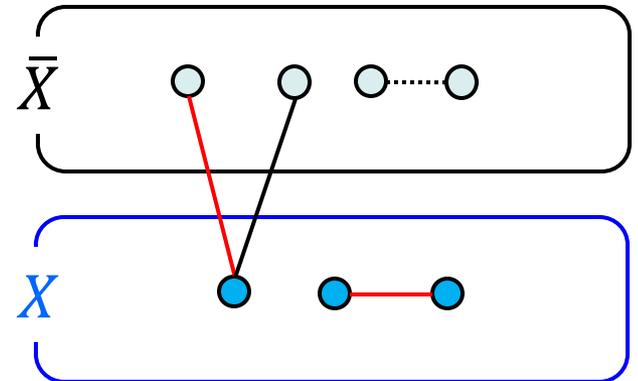
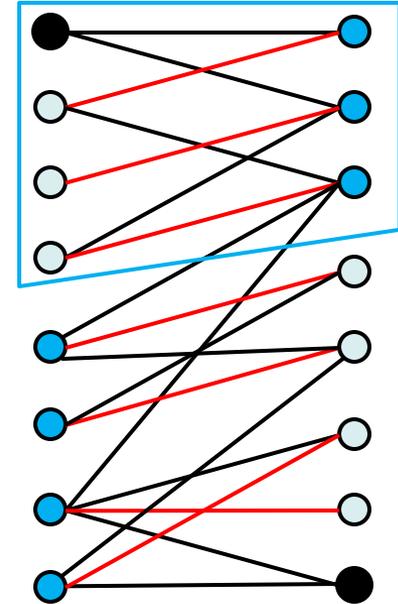
$G = (V, E)$: 2部グラフ

定理 [König 1931]

$$\begin{aligned} \max\{|M| : M \text{ はマッチング}\} \\ = \min\{|X| : X \subseteq V, X \text{ は点被覆}\} \end{aligned}$$

[max ≤ min の証明]

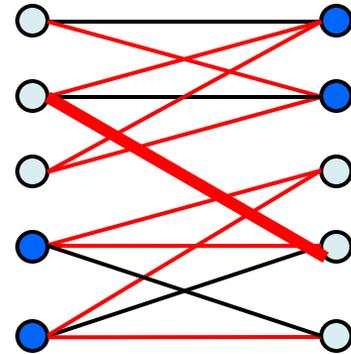
- $|M| = |M[X]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[\bar{X}]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq |X|$
- $|M[\bar{X}]| = 0$



2部グラフの 2-マッチング

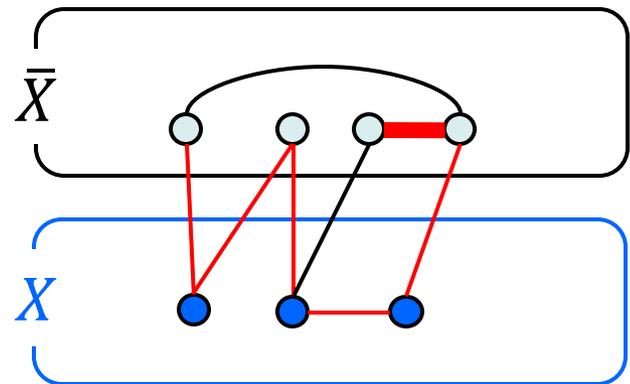
$G = (V, E)$: 2部グラフ

定理 $\max\{|M| : M \text{ は 2-マッチング}\}$
 $= \min\{2|X| + |E[\bar{X}]| : X \subseteq V\}$



[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[X]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[\bar{X}]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq 2|X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq |E[\bar{X}]|$



一般グラフのマッチング

Tutte 1947, Berge 1958

定理 [Tutte-Berge 公式]

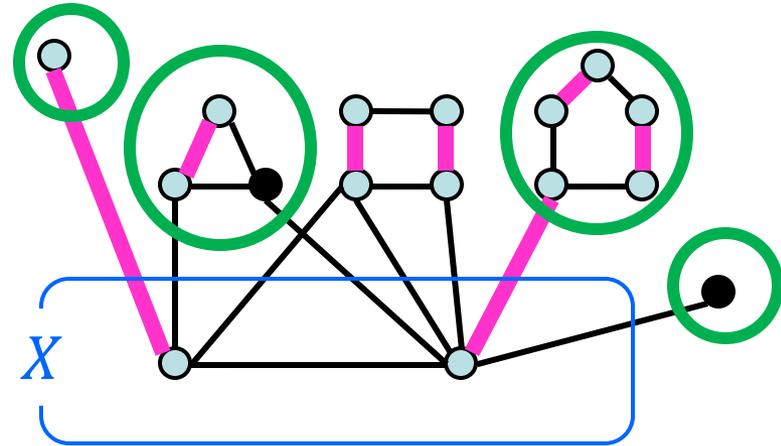
$$\max \{ |M| : M \text{ はマッチング} \}$$

$$= \min \frac{1}{2} \{ |V| + |X| - \text{odd}(\bar{X}) : X \subseteq V \}$$

頂点数奇数の成分数

[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[\bar{X}]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[X]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq |X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq \frac{1}{2} (|\bar{X}| - \text{odd}(\bar{X}))$



$$\text{odd}(\bar{X}) = 4$$

Dulmage-Mendelsohn 分解

定理 [Dulmage-Mendelsohn 分解]

➤ $Y \subseteq V$ が最小点被覆

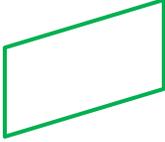
$$\Rightarrow X_2^+ \subseteq Y^+ \subseteq X_1^+, X_1^- \subseteq Y^- \subseteq X_2^-$$

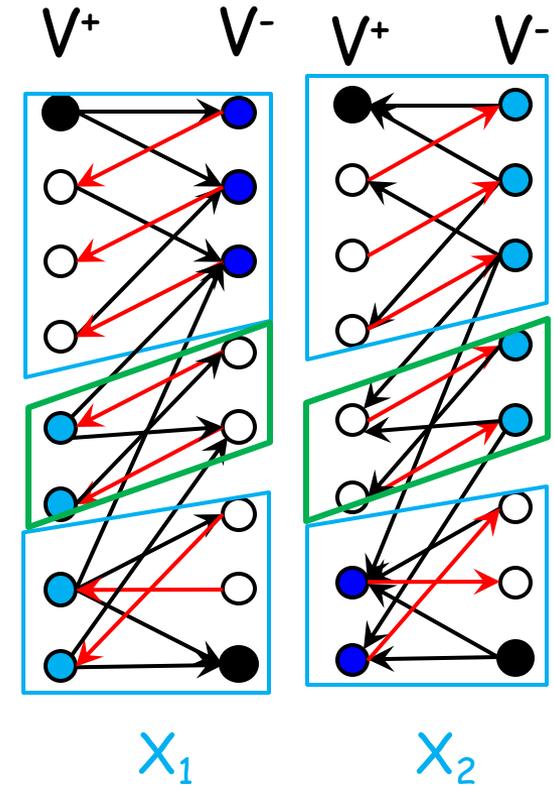
➤  ,  の各枝を含む
最大マッチングがある

➤  は完全マッチングをもつ

➤ $M \subseteq E$ が最大マッチング

$\Leftrightarrow M$ は以下から成る :

{  ,  の最大マッチング
 の完全マッチング



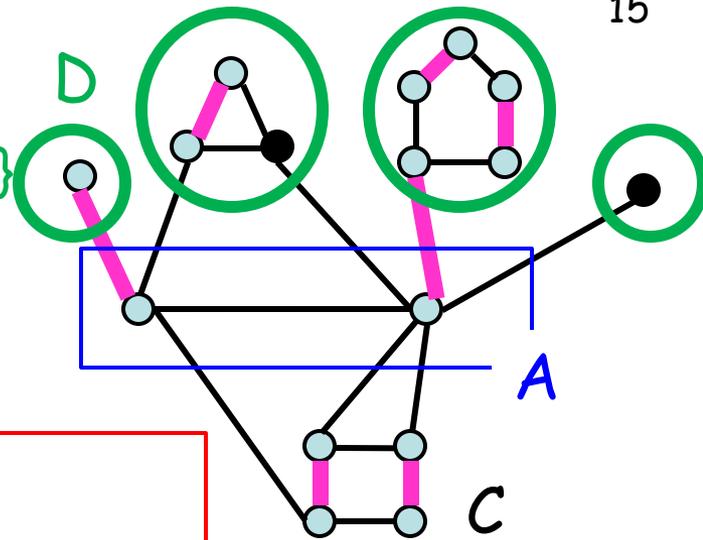
+ ➤  の束構造

Edmonds-Gallai 分解

$D = \{v \in V : v \text{ を被覆しない最大マッチングが存在}\}$

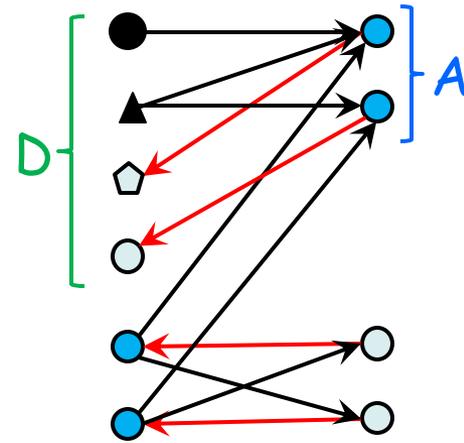
$A = \{v \in V - D : v \text{ は } D \text{ の頂点に隣接}\}$

$C = V - D - A$



定理 [Edmonds-Gallai 分解]

- $G[D]$ の連結成分は factor-critical
- $G[C]$ は完全マッチングをもつ
- $M: G$ の最大マッチング \rightarrow
 - $M[D]$: 各連結成分の near-perfect matching
 - $M[C]$: $G[C]$ の完全マッチング
 - $M[D, A]$: A の頂点は D の異なる連結成分とマッチ
- C を削除, $E[A]$ を削除, $G[D]$ の連結成分を縮約して得られる2部グラフにおいて, $\Gamma(X) > |X| \quad \forall X \subseteq A$
- $\max\{|M|\} = (|V| + |A| - \text{odd}(\bar{A}))/2$



目次

◆ C_k -free 2-マッチング

- 定義・動機
- 先行研究

◆ 古典的な定理

- 最大最小定理
 - 2部グラフのマッチング / 2-マッチング
 - 一般グラフのマッチング
- 分解定理
 - Dulmage-Mendelsohn 分解 (2部グラフ)
 - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

◆ 本研究：2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング

- 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
- 分解定理

最大最小定理 [Király '99]

$G = (V, E)$: 2部グラフ

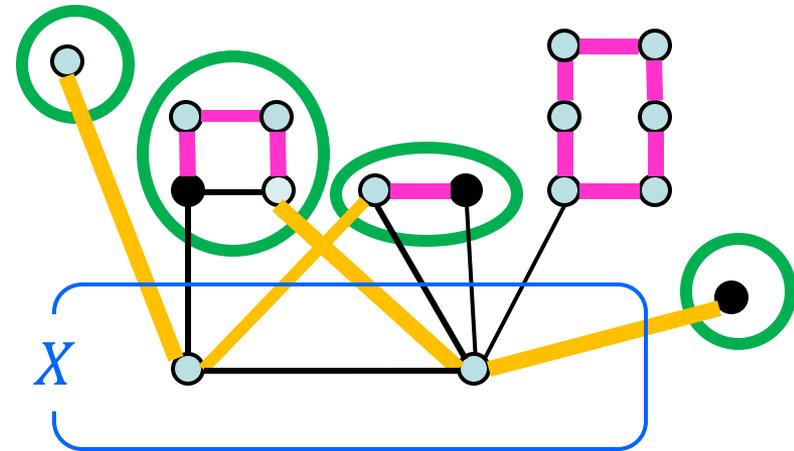
$$q(\bar{X}) = \#\{\circ, \circ-\circ, \begin{array}{c} \circ-\circ \\ \circ-\circ \end{array} \text{ in } G[\bar{X}]\}$$

定理 [Király '99]

$$\begin{aligned} & \max \{ |M| : M \text{ は } C_4\text{-free 2-マッチング} \} \\ & = \min \{ |V| + |X| - q(\bar{X}) : X \subseteq V \} \end{aligned}$$

[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[\bar{X}]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[X]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq 2|X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq |\bar{X}| - q(\bar{X})$



$$q(\bar{X}) = 4$$

定理 (一般グラフのマッチング)

$$\begin{aligned} & \max \{ |M| : M \text{ はマッチング} \} \\ & = \min \frac{1}{2} \{ |V| + |X| - \text{odd}(\bar{X}) : X \subseteq V \} \end{aligned}$$

最大最小定理 [Frank '03]

$G = (V, E)$: 2部グラフ

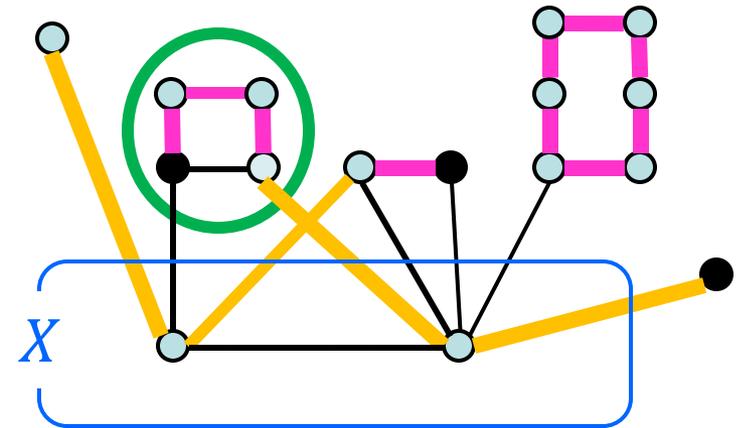
$$c(\bar{X}) = \#\{\text{C}_4 \text{ in } G[\bar{X}]\}$$

定理 [Frank '03]

$$\begin{aligned} & \max \{ |M| : M \text{ は } C_4\text{-free 2-マッチング} \} \\ & = \min \{ 2|X| + |E[\bar{X}]| - c(\bar{X}) : X \subseteq V \} \end{aligned}$$

[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[\bar{X}]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[X]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq 2|X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq |E[\bar{X}]| - c(\bar{X})$



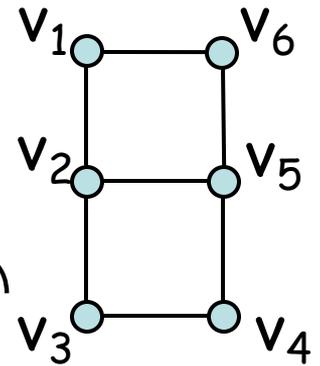
$$c(\bar{X}) = 1$$

定理 (2部グラフの2-マッチング)

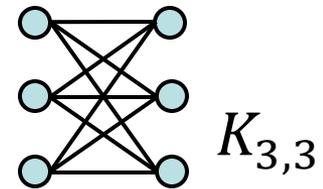
$$\begin{aligned} & \max \{ |M| : M \text{ は 2-マッチング} \} \\ & = \min \{ 2|X| + |E[\bar{X}]| : X \subseteq V \} \end{aligned}$$

[Király '99] と [Frank '03] の比較

- [Király '99] \cong 一般グラフのマッチング
[Frank '03] \cong 2部グラフの2-マッチング
- $X_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$: [Király '99] の最小化元
[Frank '03] の最小化元でない
- $X_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\}$: [Frank '03] の最小化元
[Király '99] の最小化元でない



- [Frank '03]: $K_{t,t}$ -free t -マッチングへの拡張
多面体的表現への拡張 [Makai '07]



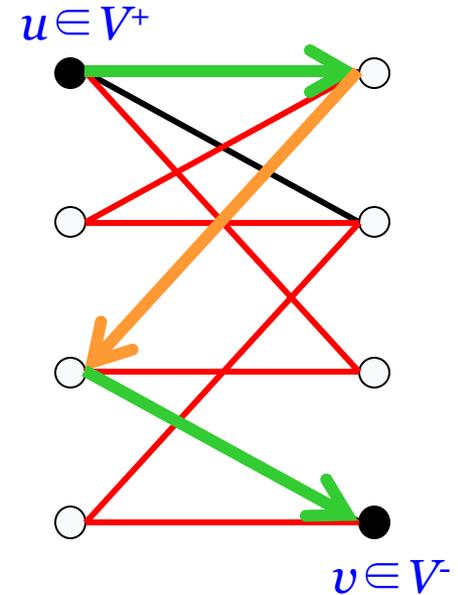
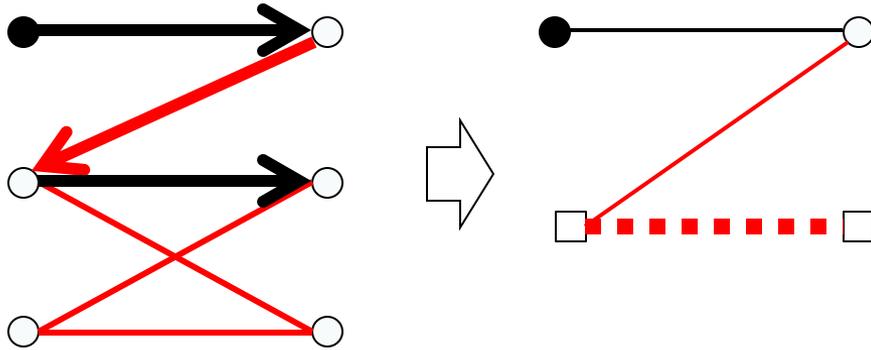
- [Király '99]: 分解定理への適用

- アルゴリズム

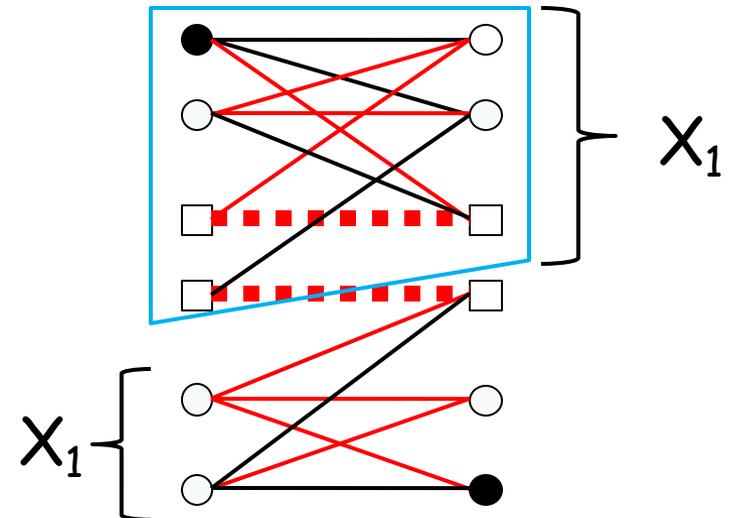
- [Hartvigsen '06]: [Király '99], [Frank '03] 双方の最小化元
- [Pap '07]: [Frank '03] の最小化元

アルゴリズム [Hartvigsen '06]

- 増加道 P を探索 $\rightarrow M' := M \Delta P$ に更新
- 探索中に M' が C_4 を含むような構造が見つかる $\rightarrow C_4$ を縮約



- 増加道なし \rightarrow 最大 C_4 -free 2-マッチング M 最小化元 X_1



二つの最小化元 と 分解定理

X_1 : V^+ から探索したときの最小化元

X_2 : V^- から探索したときの最小化元

定理

$Y \subseteq V$ が [Király '99] の最小化元
 $\Rightarrow X_2^+ \subseteq Y^+ \subseteq X_1^+, X_1^- \subseteq Y^- \subseteq X_2^-$

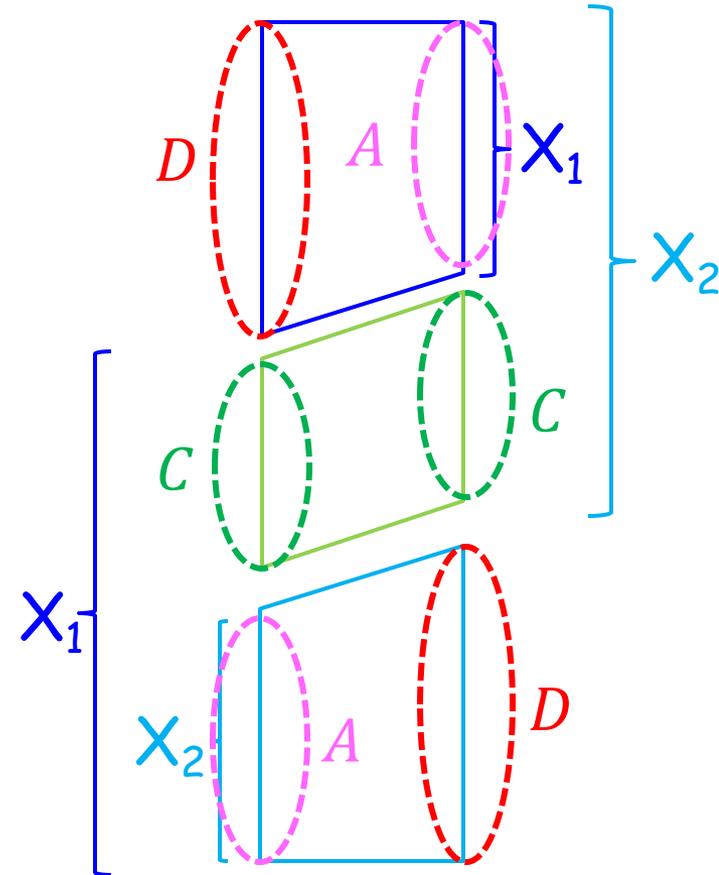
$$D = (V^+ - X_1) \cup (V^- - X_2)$$

$$A = (V^+ \cap X_2) \cup (V^- \cap X_1)$$

$$C = V - D - A$$

定理

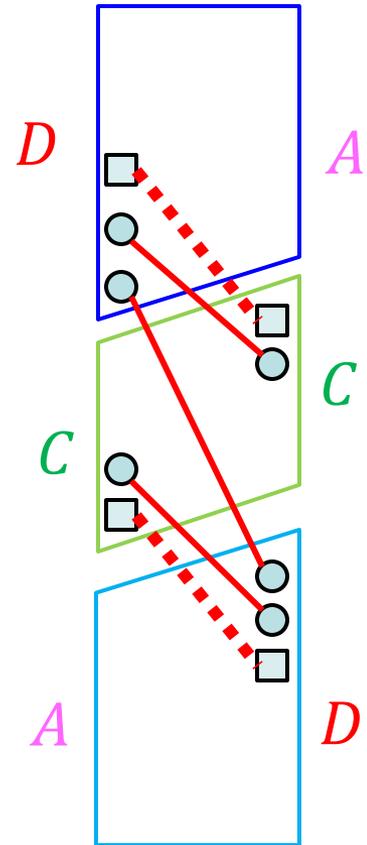
$D = \{u \in V \mid \exists \text{最大 } C_4\text{-free } 2\text{-マツチング } M, \deg_M(u) < 2\}$



分解定理 (続き)

定理

- $E[D, A]$ の各枝を含む最大 C_4 -free 2-マッチングが存在
- $G[D], G[D, C]$ の連結成分は $\circ, \circ-\circ, \begin{array}{c} \circ-\circ \\ \circ-\circ \end{array}$
- $G[D], G[D, C]$ の C_4 を縮約:
 - $u \in C, b(u) = 1$ if u が D に隣接, otherwise $b(u) = 2$
 - $G[C]$ は b -因子をもつ
 - $b(\Gamma(X) \cap D) > 2|X| \quad \forall X \subseteq A$
- $M: G$ の最大 C_4 -free 2-マッチング \rightarrow
 - $M[D], M[D, C]$: 各 $\circ-\circ$ から 1 本, 各 $\begin{array}{c} \circ-\circ \\ \circ-\circ \end{array}$ から 3 本
 - $M[C]$: $G[C]$ の b -因子
 - $M[D, A]$: A の各頂点は D の異なる二つの連結成分とマッチ



◆ C_k -free 2-マッチング

- 定義・動機
- 先行研究

◆ 古典的な定理

- 最大最小定理
 - 2部グラフのマッチング / 2-マッチング
 - 一般グラフのマッチング
- 分解定理
 - Dulmage-Mendelsohn 分解 (2部グラフ)
 - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

◆ 本研究：2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング

- 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
- 分解定理

まとめと今後の課題

◆ 2部グラフにおける C_4 -free 2-マッチング : well-solved

- 最大最小定理
- 多面体的表現・双対整数性
- アルゴリズム
- 離散凸性
- 分解定理 [本研究]

◆ 巡回セールスマン問題への応用

cf. [Karp, Ravi '14]

2部グラフにおけるグラフ的巡回セールスマン問題に対する
9/7 近似アルゴリズム

◆ [Király '99] と [Frank '03] の関係

- ◆ 一般グラフの C_4 -free 2-マッチング問題
- 重み付き C_3 -free 2-マッチング問題

離散凸構造

[Kobayashi, Szabó, T. '12]
[Kobayashi '14]