２部グラフにおける
制約付き 2-マッチングの分解定理

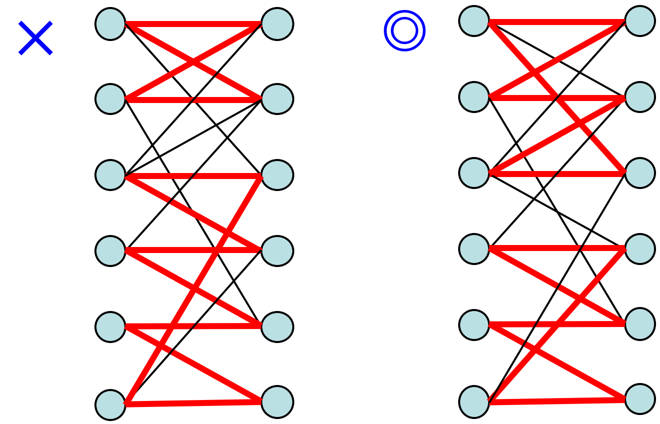
高澤 兼二郎

京都大学 数理解析研究所

研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」@ 統計数理研究所
2015 年 3 月 19 日

本研究の位置づけ

➢ 本研究の対象：
長さ 4 以下の閉路を含まない 2-マッチング
(C_4-free 2-マッチング)

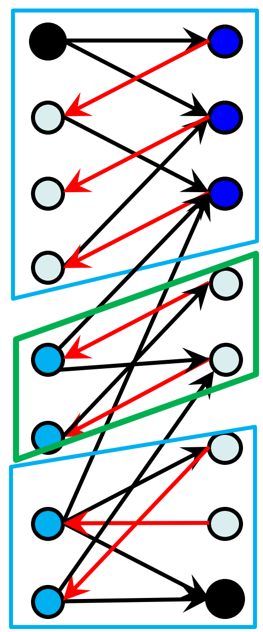


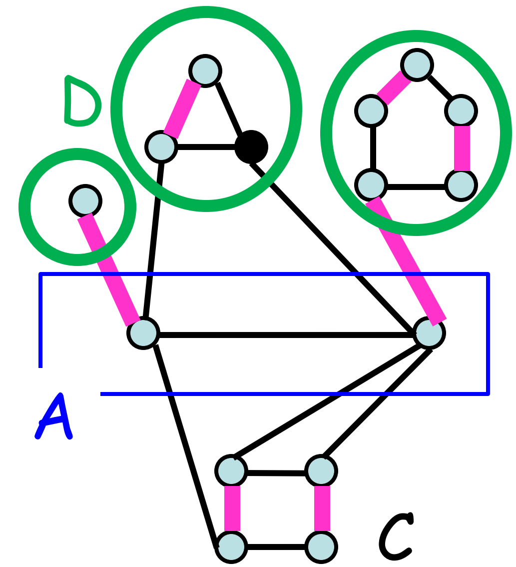
2部グラフにおけるマッチングの
Dulmage-Mendelsohn 分解

↓

一般グラフにおけるマッチングの
Edmonds-Gallai 分解

⇕ 似た構造





[本研究] 2部グラフにおける C_4-free 2-マッチングの分解定理

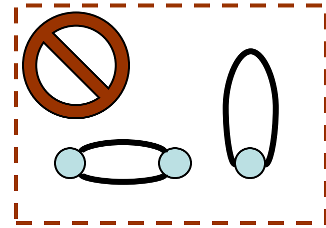
目次

- C_k-free 2-マッチング
  - 定義・動機
  - 先行研究

- 古典的な定理
  - 最大最小定理
    - ２部グラフのマッチング / 2-マッチング
    - 一般グラフのマッチング
  - 分解定理
    - Dulmage-Mendelsohn 分解 (２部グラフ)
    - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

- 本研究：２部グラフにおける C_4-free 2-マッチング
  - 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
  - 分解定理

2-マッチング



単純無向グラフ $G = (V,E)$

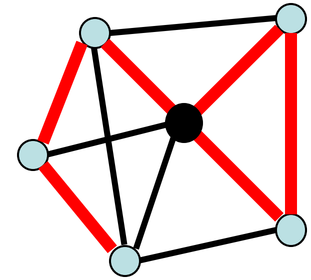
定義

- $M \subseteq E$ が 2-マッチング
  $\Leftrightarrow$ M の各頂点の次数 ≤ 2

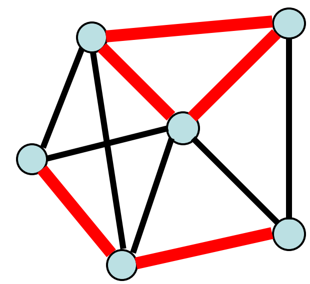
閉路 + パス

- $M \subseteq E$ が 2-因子
  $\Leftrightarrow$ M の各頂点の次数 $= 2$

閉路



×

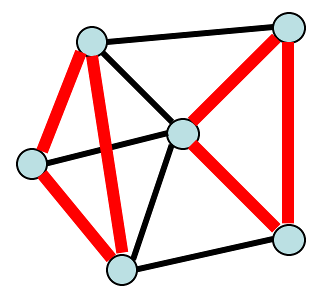


2-マッチング

問題

$|M|$ 最大の 2-マッチングを求める

- 多項式時間可解 (マッチングに帰着)



2-因子

C_k-free 2-マッチング

単純無向グラフ $G = (V,E)$

正整数 k

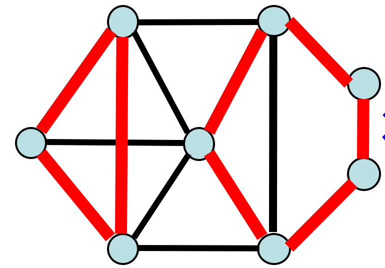
定義

2-マッチング $M \subseteq E$ が C_k-free
⟺ 長さ k 以下の閉路を含まない

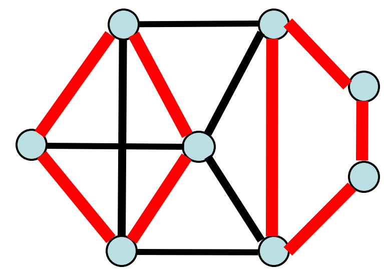
問題

|M| 最大の C_k-free 2-マッチングを求める

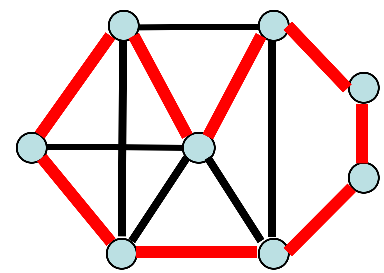
- $k \le 2$ ➔ 2-マッチング問題と同じ
- $k \ge n/2$ ➔ ハミルトン閉路問題を含む
  (最適値 = n ➔ ハミルトン閉路)



× C_3-free



○ C_3-free
× C_4-free



○ C_4-free

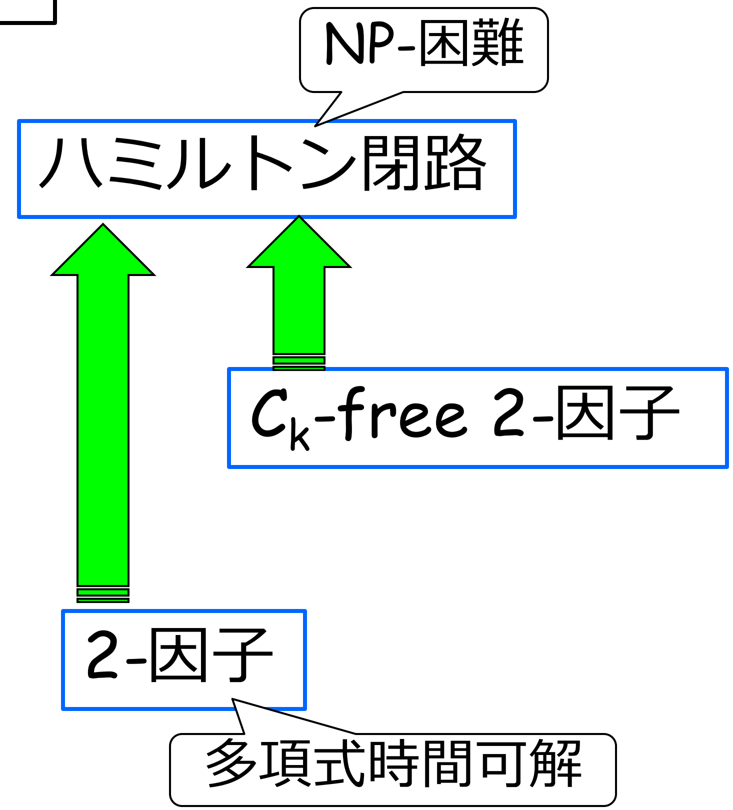
$n = |V|$

動機, 応用

◆ ハミルトン閉路問題の緩和問題

➢ C_k-free 2-因子を初期解とする巡回セールスマン問題へのアプローチ

- Boyd, Iwata, T. '13
- Boyd, Sitters, van der Ster, Stougie '14
- Correa, Larré, Soto '12
- Karp, Ravi '14



◆ 連結度増大問題

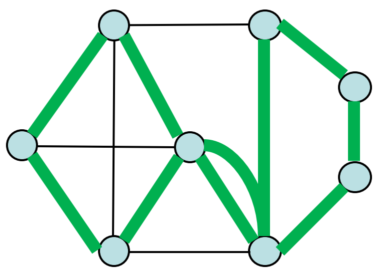
G = (V,E) が $(n-3)$-点連結
⟺ G の補グラフは C_4 を含まない 2-マッチング

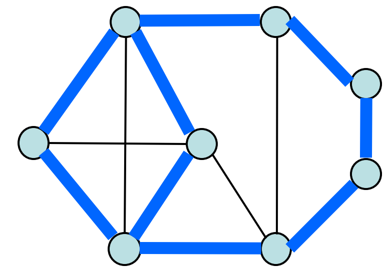
- Bérczi, Kobayashi '12

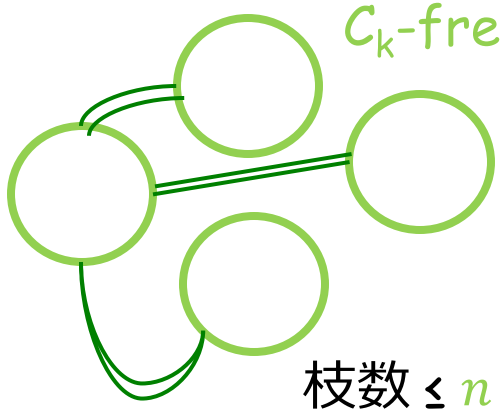
動機，応用

◆ ハミルトン閉路問題の緩和問題

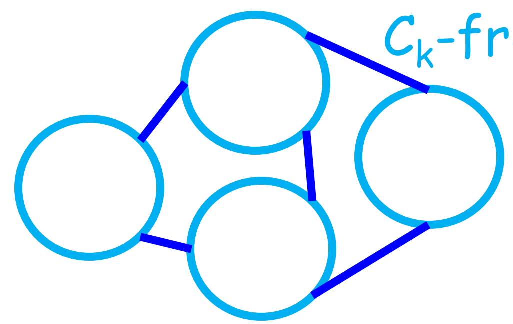
- グラフ的巡回セールスマン問題 (= 最小全域オイラー部分グラフ問題)
- 最小全域 2 辺連結部分グラフ問題







枝数 ≤ $n + 2 \cdot (\frac{n}{k+1} - 1)$



枝数 ≤ $n + 2 \cdot (\frac{n}{k+1} - 1)$

C_k-free 2-因子 ➔ $(1 + \frac{2}{k+1})$-近似

C_k-free 2-マッチングの計算複雑度

一般グラフ	重みなし	重み付き
$k \geq n/2$	NP 困難	NP 困難
$k \geq 5$	NP 困難 (Papadimitriou '78)	NP 困難
$k = 4$	OPEN	NP 困難 (Vornberger '80)
$k = 3$	P (Hartvigsen '84)	OPEN
$k = 2$	P	P

2 部グラフ	重みなし	重み付き
$k \geq n/2$	NP 困難	NP 困難
$k \geq 6$	NP 困難 (Geelen '99)	NP 困難 (Geelen '99)
$k = 4$	P (Hartvigsen '06, Pap '07)	NP 困難 (Király '03)
$k = 2$	P	P

枝重みがある性質をみたすとき
- 双対整数性をもつ多面体的表現 [Makai '07]
- 組合せ的アルゴリズム [T. '09]
- ジャンプシステム上のM凸関数 [Szabó, Kobayashi, T. '12]

2部グラフにおけるC_4-free 2-マッチング

2部グラフにおける C_4-free 2-マッチング

- 最大最小定理 [Király '99, Frank '03]
- 双対整数性 [Makai '07]
- アルゴリズム [Hartvigsen '06, Pap '07; T. '09]
- 離散凸性 [Szabó, Kobayashi, T. '12]
- 分解定理 [本研究]

マッチング

- 最大最小定理 [Tutte '47, Berge '58]
- 完全双対整数性 [Edmonds '65, Cunningham-Marsh '78]
- アルゴリズム [Edmonds '65] など
- 離散凸性 [Chandrasekaran-Kabadi '88, Bouchet '89; Murota '97]
- 分解定理 [Dulmage-Mendelsohn '58; Gallai '63, Edmonds '65]

目次

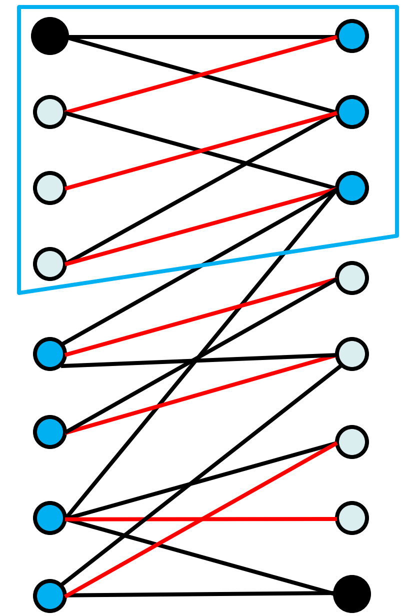
- C_k-free 2-マッチング
  - 定義・動機
  - 先行研究

- 古典的な定理
  - 最大最小定理
    - ２部グラフのマッチング / 2-マッチング
    - 一般グラフのマッチング
  - 分解定理
    - Dulmage-Mendelsohn 分解 (２部グラフ)
    - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

- 本研究：２部グラフにおける C_4-free 2-マッチング
  - 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
  - 分解定理

2部グラフのマッチング

G = (V,E) : 2部グラフ

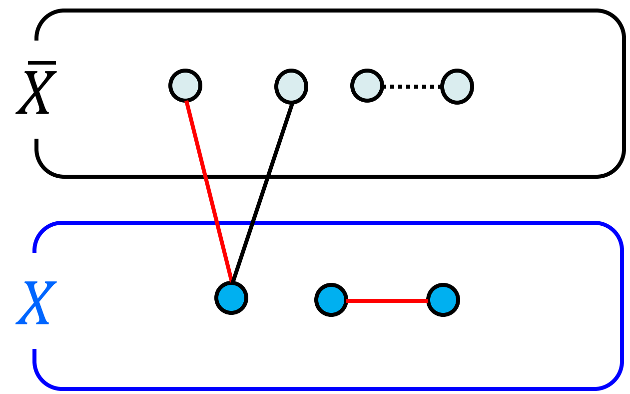


定理 [Kőnig 1931]

max{|M| : M はマッチング}
= min{$|X|$: $X \subseteq V$, X は点被覆}

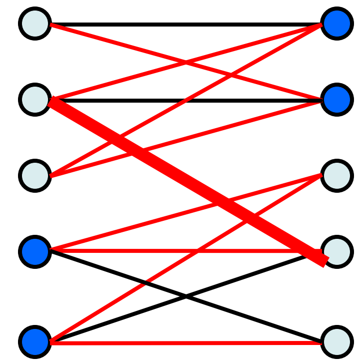
[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[X]| + |M[X,\bar{X}]| + |M[\bar{X}]|$
- $|M[X,\bar{X}]| + 2|M[X]| \leq |X|$
- $|M[\bar{X}]| = 0$



2部グラフの 2-マッチング

G = (V,E) : 2部グラフ

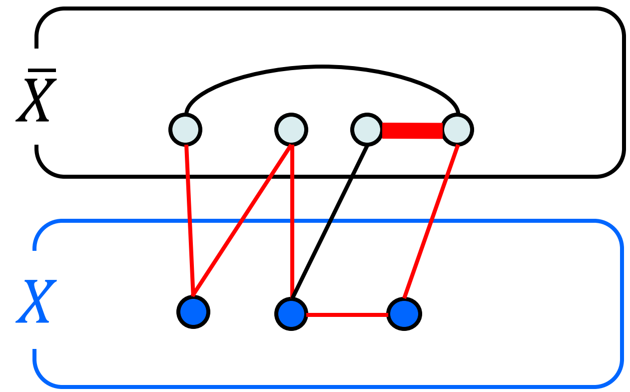


定理

max{|M| : M は 2-マッチング}
$= \min\{2|X| + |E[\bar{X}]| : X \subseteq V\}$

[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[X]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[\bar{X}]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq 2|X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq |E[\bar{X}]|$



一般グラフのマッチング

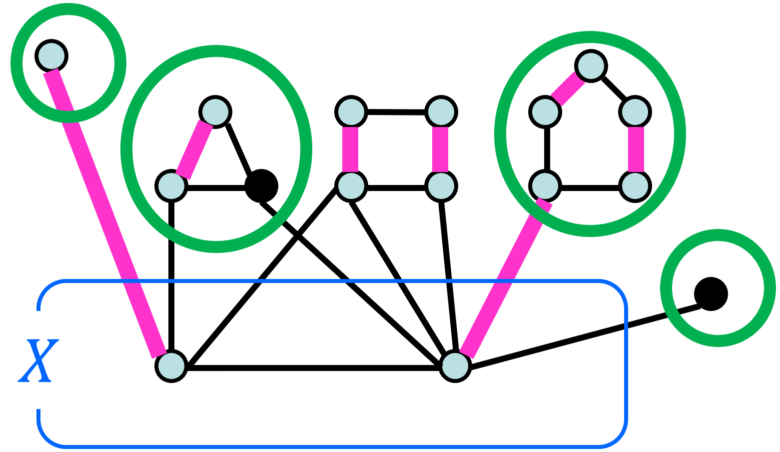
Tutte 1947, Berge 1958

定理 [Tutte-Berge 公式]

max {|M| : M はマッチング}

$= \min \frac{1}{2}\{|V| + |X| - \mathrm{odd}(\bar{X}) : X \subseteq V\}$

頂点数奇数の成分数



$\mathrm{odd}(\bar{X}) = 4$

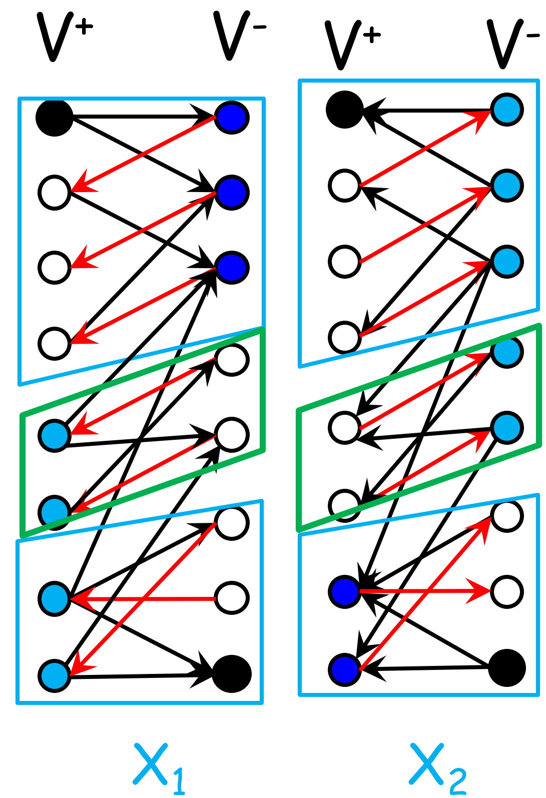
[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[\bar{X}]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[X]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq |X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq \frac{1}{2}(|\bar{X}| - \mathrm{odd}(\bar{X}))$

Dulmage-Mendelsohn 分解

定理 [Dulmage-Mendelsohn 分解]

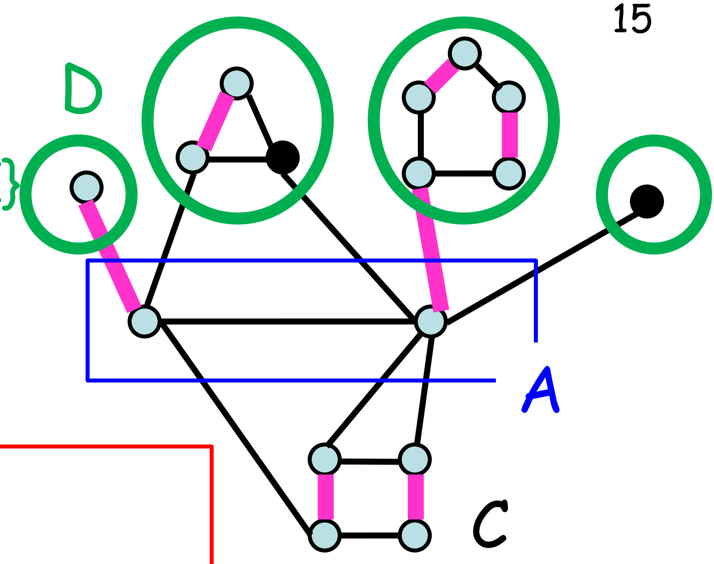
- $Y \subseteq V$ が最小点被覆
  $\Rightarrow X_2^+ \subseteq Y^+ \subseteq X_1^+,\ X_1^- \subseteq Y^- \subseteq X_2^-$
- , の各枝を含む
  最大マッチングがある
- は完全マッチングをもつ
- $M \subseteq E$ が最大マッチング
  $\Leftrightarrow M$ は以下から成る：
  - , の最大マッチング
  - の完全マッチング



+ の束構造

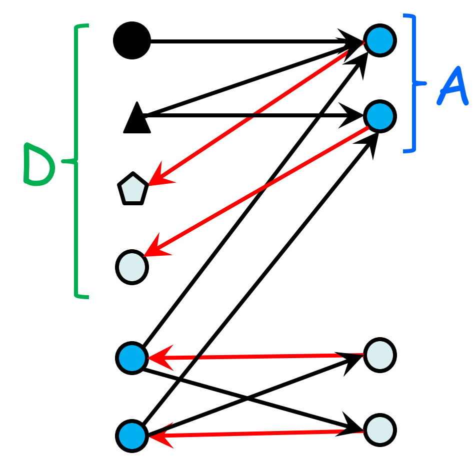
Edmonds-Gallai 分解

D = {v∈V : v を被覆しない最大マッチングが存在}
A = {v∈V-D : vはDの頂点に隣接}
C = V - D - A



定理 [Edmonds-Gallai 分解]

- G[D] の連結成分は factor-critical
- G[C] は完全マッチングをもつ
- M: G の最大マッチング ➔
  - M[D]: 各連結成分の near-perfect matching
  - M[C]: G[C] の完全マッチング
  - M[D,A]: A の頂点は D の異なる連結成分とマッチ
- C を削除, E[A] を削除, G[D] の連結成分を縮約 して得られる2部グラフにおいて, Γ(X) > |X| ∀X⊆A
- max{|M|} = $(|V| + |A| - \mathrm{odd}(\bar{A}))/2$



目次

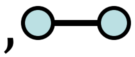
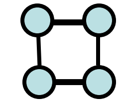
- C_k-free 2-マッチング
  - 定義・動機
  - 先行研究

- 古典的な定理
  - 最大最小定理
    - ２部グラフのマッチング / 2-マッチング
    - 一般グラフのマッチング
  - 分解定理
    - Dulmage-Mendelsohn 分解 (２部グラフ)
    - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

- 本研究：２部グラフにおける C_4-free 2-マッチング
  - 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
  - 分解定理

最大最小定理 [Király '99]

$G = (V,E)$: 2 部グラフ

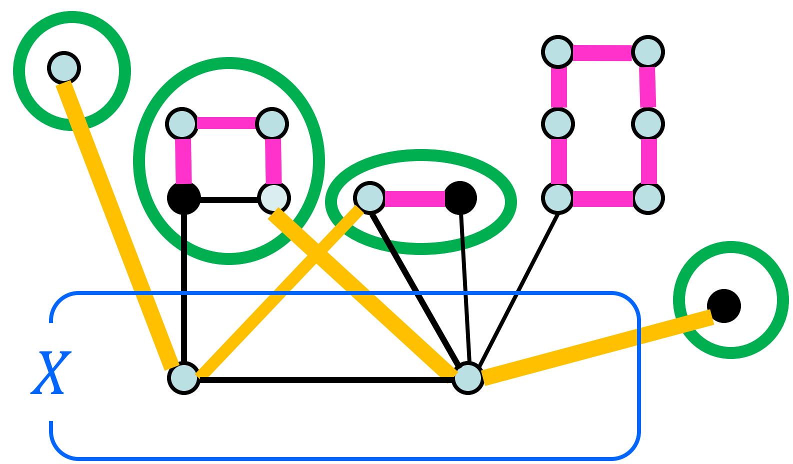
$q(\bar{X}) = \#\{$  ,  ,  in $G[\bar{X}]\}$

定理 [Király '99]

max {|M| : M は C_4-free 2-マッチング}
$= \min\{|V| + |X| - q(\bar{X}) : X \subseteq V\}$

[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[\bar{X}]| + |M[X,\bar{X}]| + |M[X]|$
- $|M[X,\bar{X}]| + 2|M[X]| \leq 2|X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq |\bar{X}| - q(\bar{X})$

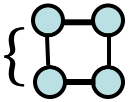


$q(\bar{X}) = 4$

定理 (一般グラフのマッチング)

max {|M| : M はマッチング}
$= \min \frac{1}{2}\{|V| + |X| - \mathrm{odd}(\bar{X}) : X \subseteq V\}$

最大最小定理 [Frank '03]

$c(\bar{X}) = \#\{$  in $G[\bar{X}]\}$

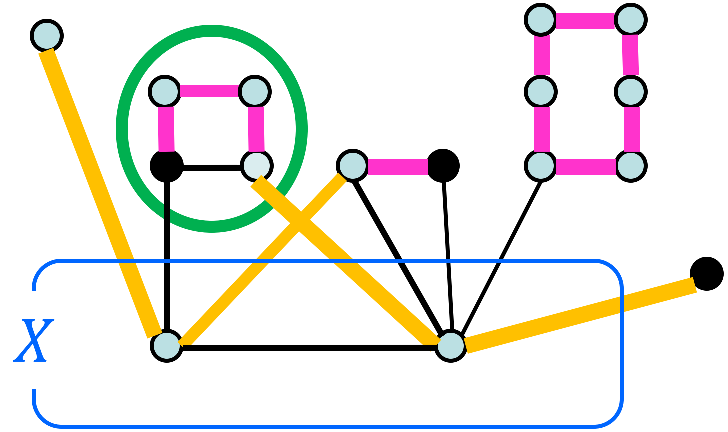
$G = (V, E)$: 2 部グラフ

定理 [Frank '03]

max {|M| : M は C_4-free 2-マッチング}
$= \min\{2|X| + E[\bar{X}] - c(\bar{X}) : X \subseteq V\}$

[max ≤ min の証明]

- $|M| = |M[\bar{X}]| + |M[X, \bar{X}]| + |M[X]|$
- $|M[X, \bar{X}]| + 2|M[X]| \leq 2|X|$
- $|M[\bar{X}]| \leq |E[\bar{X}]| - c(\bar{X})$



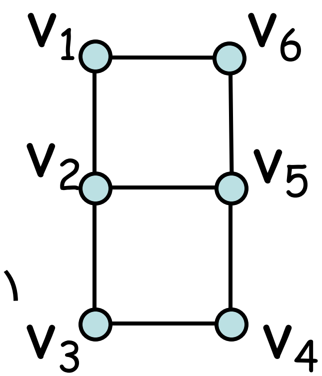
$c(\bar{X}) = 1$

定理 (2部グラフの 2-マッチング)

max{|M| : M は 2-マッチング}
$= \min\{2|X| + |E[\bar{X}]| : X \subseteq V\}$

[Király '99] と [Frank '03] の比較

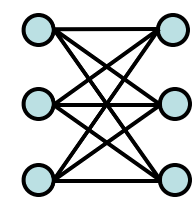
- [Király '99] ≅ 一般グラフのマッチング
  [Frank '03] ≅ 2 部グラフの 2-マッチング



- $X_1 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ ：[Király '99] の最小化元
  [Frank '03] の最小化元でない

  $X_2 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6\}$ ：[Frank '03] の最小化元
  [Király '99]の最小化元でない

- [Frank '03]：$K_{t,t}$-free t-マッチングへの拡張
  多面体的表現への拡張 [Makai '07]



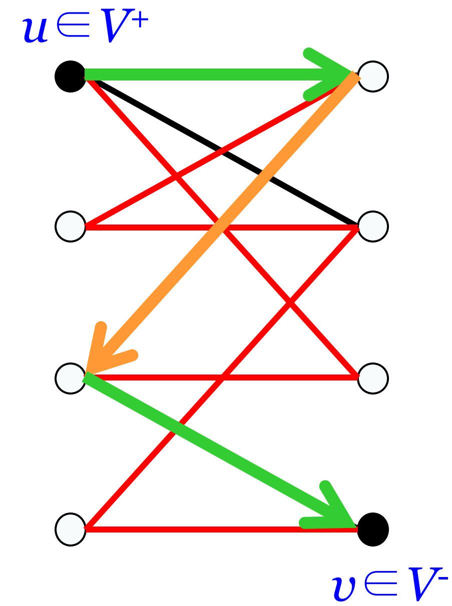
$K_{3,3}$

- [Király '99]：分解定理への適用

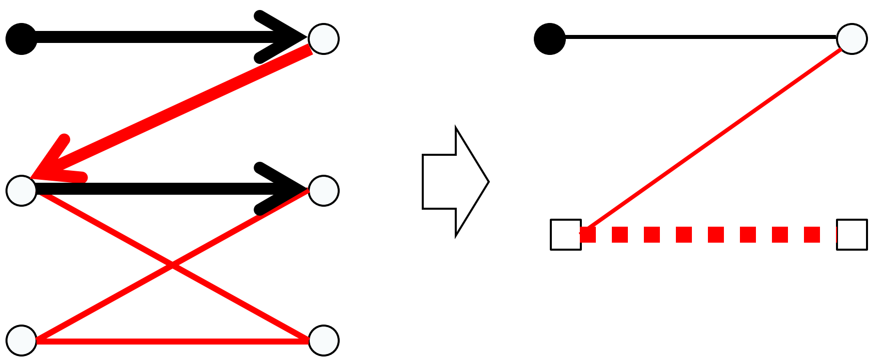
- アルゴリズム
  - [Hartvigsen '06]：[Király '99], [Frank '03] 双方の最小化元
  - [Pap '07]：[Frank '03] の最小化元

アルゴリズム [Hartvigsen '06]

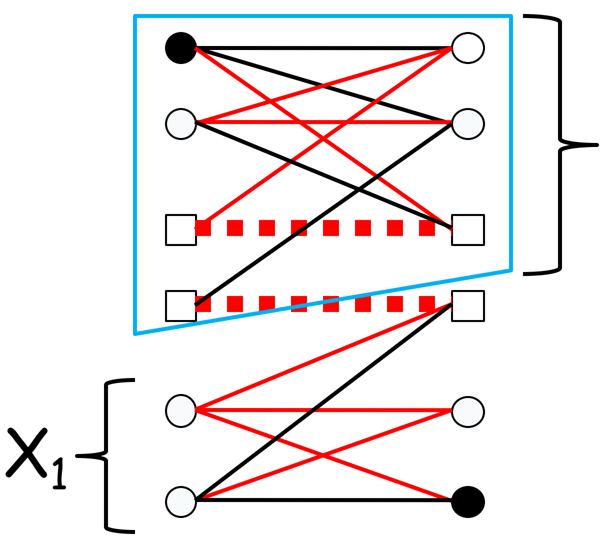
- 増加道 P を探索 ➔ M' := MΔP に更新



- 探索中に M' が C_4 を含むような構造が見つかる
  ➔ C_4 を縮約

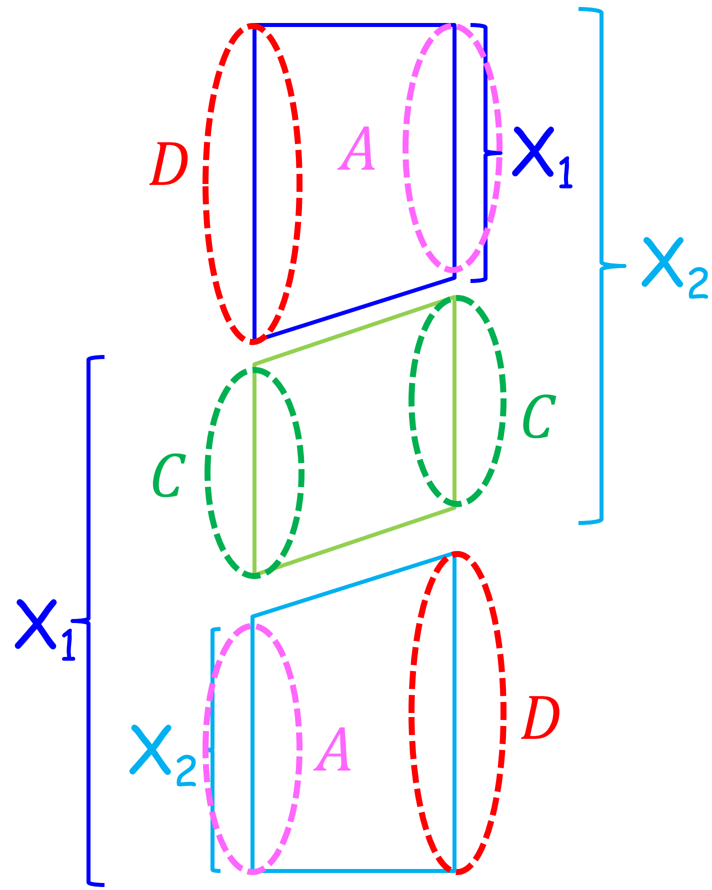


- 増加道なし
  ➔ 最大 C_4-free 2-マッチング M
  最小化元 X_1



二つの最小化元 と 分解定理

X_1 : V^+ から探索したときの最小化元
X_2 : V^- から探索したときの最小化元



定理

$Y \subseteq V$ が [Király '99] の最小化元
$\Rightarrow\ X_2^+ \subseteq Y^+ \subseteq X_1^+, X_1^- \subseteq Y^- \subseteq X_2^-$

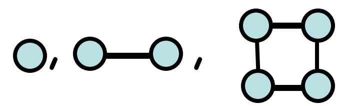
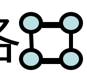
$D = (V^+ - X_1) \cup (V^- - X_2)$
$A = (V^+ \cap X_2) \cup (V^- \cap X_1)$
$C = V - D - A$

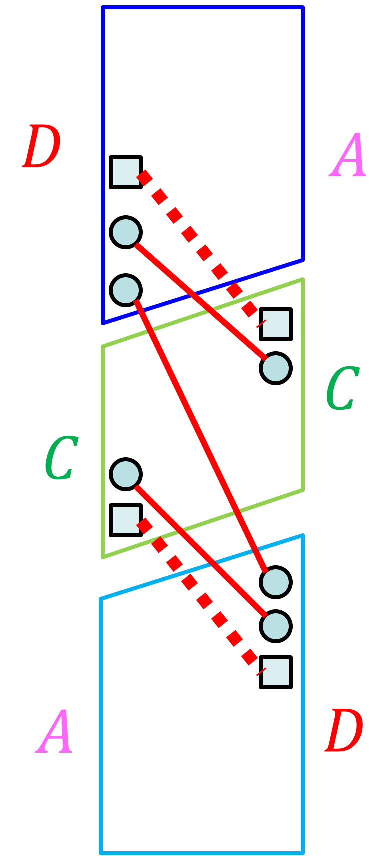
定理

$D = \{u \in V \mid \exists$最大 $C_4 -$ free $2 -$ マッチング $M, \deg_{M(u)} < 2\}$

分解定理 (続き)

定理

- E[D,A] の各枝を含む最大 C_4-free 2-マッチングが存在
- G[D], G[D,C]の連結成分は 
- G[D], G[D,C] の C_4 を縮約;
  $u \in C$, b(u) = 1 if u が D に隣接, otherwise b(u) = 2
  - G[C] は b-因子をもつ
  - $b(\Gamma(X) \cap D) > 2|X| \ \forall X \subseteq A$
- M: G の最大 C_4-free 2-マッチング ➔
  - M[D], M[D,C]: 各 から 1 本, 各 から 3 本
  - M[C]: G[C] の b-因子
  - M[D,A]: A の各頂点は D の
    異なる二つの連結成分とマッチ



目次

- C_k-free 2-マッチング
  - 定義・動機
  - 先行研究

- 古典的な定理
  - 最大最小定理
    - ２部グラフのマッチング / 2-マッチング
    - 一般グラフのマッチング
  - 分解定理
    - Dulmage-Mendelsohn 分解 (２部グラフ)
    - Edmonds-Gallai 分解 (一般グラフ)

- 本研究：２部グラフにおける C_4-free 2-マッチング
  - 最大最小定理 [Király '99], [Frank '03] の比較
  - 分解定理

まとめ と 今後の課題

◆ 2部グラフにおける C_4-free 2-マッチング：well-solved

- ➢ 最大最小定理
- ➢ 多面体的表現・双対整数性
- ➢ アルゴリズム
- ➢ 離散凸性
- ➢ 分解定理 [本研究]

◆ 巡回セールスマン問題への応用

cf. [Karp, Ravi '14]
2部グラフにおけるグラフ的巡回セールスマン問題に対する
9/7 近似アルゴリズム

◆ [Király '99] と [Frank '03] の関係

◆ 一般グラフの C_4-free 2-マッチング問題
重み付き C_3-free 2-マッチング問題

離散凸構造
[Kobayashi, Szabó, T. '12]
[Kobayashi '14]