数理統計学 レポート課題

2016 年 5 月 16 日 出題
高澤 兼二郎

注意. 下記を守ること. 守らないレポートは採点の対象としないことがある.

- A4 片面で作成すること.
- 表紙をつけること. 表紙には, 以下を明記せよ:
  - タイトル (例 :「数理統計学レポート」),
  - 学生証番号と氏名,
  - 出題日と提出日.
- 右上をホチキスで止めること.
- 2016 年 5 月 30 日午前 11 時 (日本時間) までに事務室前のレポート BOX へ提出すること.
- 手書き, LaTeX などの書式は問わないが, 読みやすい大きさ, 濃さの文字を用いること.
- 教科書, ウェブ上の資料などの各種文献を参考にしてもよい. その際は以下を守ること:
  - 参考にした文献, および, 解答中のどの部分の参考にしたかを明記すること.
  - 参考文献を理解した上で, 自分の言葉で解答を記述すること. 機械的に丸写しすることは厳禁である. もし文献が間違っていたとしても, レポートの責任は作成した自分にあることを理解せよ.
- 不正をしないこと.

課題. 次頁の問題 1–7 に解答せよ. 答えだけでなく導出過程も記述すること.

問題 1 (分散の基本性質)**.** 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ ついて, 以下を証明せよ. ここで, c は定数であり, X と Y は互いに独立である確率変数である. また, 確率変数が離散型か連続型かについては, 好きな方を取り扱うこと.

(1) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(2) $V(cX) = c^2 \cdot V(X)$.

(3) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

問題 2 (ベルヌーイ試行)**.** 表が出る確率が 1/5 であるコインを 100 回投げる. 確率変数 X_i を

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i \text{ 回目に表が出る}), \\ 0 & (i \text{ 回目に裏が出る}) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, 100)$$

と定義し, $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, $\bar{X} = S/100$ とおく. つまり, S は表が出た回数, $\bar{X}$ は表が出た割合の確率変数である. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) S の期待値 $E(S)$ と分散 $V(S)$ を求めよ.

(2) $\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ と分散 $V(\bar{X})$ を求めよ.

問題 3 (正規分布表の読み方)**.** 正規分布表を用いて以下の値を求めよ.

(1) $X \sim N(0, 1)$ に対し,

(a) $P(X \geq 1)$,
(b) $P(X \leq -2)$,
(c) $P(X \geq -2)$,
(d) $P(-2 \leq X \leq 1)$.

(2) $Z \sim N(18, 0.5^2)$ に対し,

(a) $P(Z \geq 18.5)$,
(b) $P(Z \leq 17)$,
(c) $P(17 \leq Z \leq 18.5)$.

問題 4 (母分散が既知のときの標本平均)**.** 長さが 100 cm と言われている棒の長さについて測定した. ただし, 一回の測定における標準偏差 σ を $\sigma = 0.1$ (cm) する. すなわち, 一回の測定値は正規分布 $N(100, 0.1^2)$ にしたがうと仮定する. このとき, 正規分布表を用いて以下に答えよ.

(1) 1 回測定したときの測定値が 100.abc (cm) 以上になる確率を求めよ.

(2) 9 回測定したときの測定値の平均が 100.abc (cm) 以上になる確率を求めよ. ただし, 各測定は独立であるものとする.

ただし, abc は自分の学生証番号の下三桁とせよ.

問題 5 (母分散が既知のときの標本分散)**.** 正規母集団 $N(100, 30)$ からの標本抽出を考える. このとき, カイ二乗分布表を用いて以下に答えよ. その際, 答えの根拠となったカイ二乗分布表の値を示すこと.

(1) 大きさ $n = 10$ の標本を抽出したとき, 標本分散 s^2 が 60 より大きくなる確率を求めよ.

(2) 大きさ $n = 20$ の標本を抽出したとき, 標本分散 s^2 が 60 より大きくなる確率を求めよ.

問題 6 (母分散が未知のときの標本平均)**.** 平均 3, 分散が未知の正規母集団から大きさ $n = 61$ の標本 $X_1, \ldots, X_{61}$ を抽出する. 標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 について,

$$\frac{\bar{X} - 3}{s} > a$$

となる確率が 0.01 となる定数 a を t 分布表を用いて求めよ.

問題 7 (2 標本問題)**.** 平均 10, 分散 3 の正規母集団から大きさ $n = 10$ の標本 $X_1, \ldots, X_{10}$ を抽出し, その標本分散を ${s_1}^2$ とする. また, 平均 0, 分散 4 の正規母集団から大きさ $m = 20$ の標本 $Y_1, \ldots, Y_{20}$ を抽出し, その標本分散を ${s_2}^2$ とする. このとき,

$$\frac{{s_1}^2}{{s_2}^2} > c$$

となる確率が 0.05 となる定数 c の値を F 分布表を用いて求めよ.

(以上)