数理科学特論 レポート課題

2016 年 10 月 24 日出題
高澤 兼二郎

注意. 下記を守ること. 守らないレポートは採点の対象としないことがある.

- A4 片面で作成すること.
- 1 ページ目に以下を明記すること:
  - タイトル (例 :「数理科学特論レポート」),
  - 学生証番号と氏名,
  - 出題日と提出日.
- 左上をホチキスで止めること.
- **次々回 (11 月 7 日) の講義の開始時に提出すること.**
- 手書き, LaTeX などの書式は問わないが, 読みやすい大きさ, 濃さの文字を用いること.
- 教科書, ウェブ上の資料などの各種文献を参考にしてもよい (むしろ推奨する). その際は以下を守ること:
  - 参考にした文献, および, 解答中のどの部分の参考にしたかを明記すること.
  - 参考文献を理解した上で, 自分の言葉で解答を記述すること. 機械的に丸写しすることは厳禁である. もし文献が間違っていたとしても, レポートの責任は作成した自分にあることを理解せよ.
- 他の学生と共同でレポートを作成する場合も上記に準じ, 共同作成者全員の学生証番号と氏名を明記せよ. 他の学生にレポートを一方的に見せただけの場合も, 見せた学生全員の学生証番号と氏名を 1 ページ目に明記すること (さもなくば, 不正とみなす可能性がある).
- 不正をしないこと.

課題. 次頁の問題 1–8 の中から 3 問以上を選び解答せよ.

問題 1. 区間スケジューリング問題において, すべてのジョブを最小のマシン台数で実行するとき, 各ジョブをどのマシンへの割り当てればよいかを求めるアルゴリズムを記述せよ. また, そのアルゴリズムで得られるマシン台数が最小であることを証明せよ.

問題 2. 最小全域木問題において, すべての辺コストが異なるとは限らない場合にも Kruskal のアルゴリズムは最小全域木を出力することを証明せよ.

問題 3. 最小全域木問題において, すべての辺コストが異なるとは限らない場合にも Prim のアルゴリズムは最小全域木を出力することを証明せよ.

問題 4. 関数 $f(n) : \mathbb{Z}_{++} \to \mathbb{R}$ が正整数 $q \geq 3$ と 正定数 α を用いて

$$\begin{aligned} &f(n) \leq q \cdot f\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha n, \\ &f(2) \leq \alpha \end{aligned}$$

と書けるとき, $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_2 q})$ であることを証明せよ.

問題 5. 任意のソートアルゴリズムの計算時間が $\mathrm{O}(n \log n)$ 以上であることを証明せよ.

問題 6. $2n-1$ 次多項式 $C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{2n-1} x^{2n-1}$ と 1 の $2n$ 乗根 $\omega_j = \cos(j\pi/n) + i \sin(j\pi/n)$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ に対し, $2n-1$ 次多項式 $D(x)$ を

$$D(x) = C(\omega_0) + C(\omega_1)x + \cdots + C(\omega_{2n-1})x^{2n-1}$$

で定義する. このとき,

$$c_j = \frac{1}{2n} D(\omega_{2n-j}) \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

であることを示せ.

問題 7. Dijsktra 法, Bellman–Ford 法, Warshall–Floyd 法の計算量について議論せよ.

問題 8. 無向グラフ $G = (V, E)$ において $S \subseteq V$ のどの 2 点間にも辺がないとき, S は 独立集合であるという. 頂点上の重み $w \in \mathbb{R}^V$ が与えられているとき, $w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$ が最大の独立集合を求めることは NP 困難であるが, G がパスである場合には動的計画法を用いて多項式時間で解くことができる. 以下に答えよ.

(i) 以下のアルゴリズムでは最適解が求まらないパス G の例を示せ.

> パス G の頂点を並んでいる順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ と書き, $S_1 = \{v_i \mid i$ は奇数$\}$, $S_2 = \{v_i \mid i$ は偶数$\}$ とすると, S_1, S_2 はともに独立集合である. $w(S_1) \geq w(S_2)$ ならば S_1 を, さもなくば S_2 を出力する.

(ii) 貪欲アルゴリズムでは最適解が求まらないパス G の例を示せ.

(iii) パス G の最大重み独立集合を多項式時間で求めるアルゴリズムを示せ.

(以上)