離散数学 レポート課題

2016 年 5 月 18 日出題
高澤 兼二郎

注意. 下記を守ること. 守らないレポートは採点の対象としないことがある.

- A4 片面で作成すること.
- 表紙をつけること. 表紙には, 以下を明記せよ:
  - タイトル (例:「離散数学レポート」),
  - 学生証番号と氏名,
  - 出題日と提出日.
- 右上をホチキスで止めること.
- 2016 年 5 月 31 日までに事務室前のレポート BOX へ提出すること.
- 手書き, LaTeX などの書式は問わないが, 読みやすい大きさ, 濃さの文字を用いること.
- 教科書, ウェブ上の資料などの各種文献を参考にしてもよい. その際は以下を守ること:
  - 参考にした文献, および, 解答中のどの部分の参考にしたかを明記すること.
  - 参考文献を理解した上で, 自分の言葉で解答を記述すること. 機械的に丸写しすることは厳禁である. もし文献が間違っていたとしても, レポートの責任は作成した自分にあることを理解せよ.
- 不正をしないこと.

課題. 次頁の問題 1–10 の中から 5 問以上を選び解答せよ. なお, 以下の表記を用いてよい.

- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合.
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合.
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集合.
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合.
- $\mathbb{Z}_+$: 0 以上の整数全体の集合.
- $\mathbb{Z}_{++}$ あるいは $\mathbb{N}$: 正の整数全体の集合.

問題 1 (易)**.** 例にならい, 以下の各集合を数式で表現せよ. (表現は 1 通りとは限らないが, 正しい表現を一つ与えれば十分である.)

(例) 正の偶数全体の集合.

(答) $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}_{++}\}$.

(例) 12 の正の約数全体の集合.

(答) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. あるいは $\{x \in \mathbb{Z}_{++} \mid 12/x \in \mathbb{Z}\}$

(i) 1 以上 10 以下の整数全体の集合.

(ii) 3 の倍数全体の集合. ただし, -3 など負の数も含めることとする.

(iii) 8 乗して 1 になる複素数全体の集合.

(iv) 平方数全体の集合.

問題 2 (易)**.** 以下の各命題の逆・裏・対偶を与え, それぞれの真偽を判定せよ. 偽である場合は, その証拠 (反例) を与えよ.

(i) 日本に住んでいる人は日本人である.

(ii) $m \in \mathbb{Z}_{++}$ が 4 の倍数ならば, m は偶数である.

(iii) $m \in \mathbb{Z}_{++}$ が 12 の倍数ならば, m は 2 の倍数かつ 3 の倍数である.

(iv) $m \in \mathbb{Z}_{++}$ が 6 の倍数ならば, m は 3 の倍数かつ 4 の倍数である.

(v) $m \in \mathbb{Z}_{++}$ が 4 の倍数または 6 の倍数ならば, m は偶数である.

問題 3 (易)**.** 実数 x, y について, $x + y \geq 2$ ならば $x \geq 1$ または $y \geq 1$ であることを背理法によって証明せよ.

問題 4. $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法によって証明せよ.

問題 5 (易)**.** 任意の $n \in \mathbb{Z}_{++}$ について

$$\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$$

が成り立つことを帰納法を用いて証明せよ.

問題 6. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{++}$ について

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

が成り立つことを帰納法を用いて証明せよ.

問題 7. 関数 $f : \mathbb{Z}_{++} \to \mathbb{Z}_{++}$ を

$$\begin{aligned} &f(1) = 1, \\ &f(2) = 1, \\ &f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

で定義する. このとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{++}$ に対して

$$f(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

が成り立つことを帰納法を用いて証明せよ.

問題 8. n 本の直線が平面上に配置されており, どの 2 本も平行でなく, どの 3 本も 1 点で交わっていない. このとき, この n 本の直線によって平面が $n(n+1)/2+1$ 個の領域に分割されることを帰納法を用いて証明せよ.

問題 9 (易)**.** 集合 $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 101 \leq x \leq 200\}$, $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 98\}$ について, 写像 $f : S \to T$ を以下で定義する:

$$f(x) = (x \text{ を } 99 \text{ で割った余り}) \quad (x \in S).$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(i) f が全射であることを証明せよ.

(ii) f が単射でないことを証明せよ.

問題 10. 相異なる 100 個の整数からなる任意の集合 S があったとき, S の中に 99 で割った余りが等しくなる二つの要素があることを鳩の巣原理を用いて証明せよ.

(以上)